

QC
1
A613

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 403. Band

Kuratorium:

F. Paschen M. Planck R. Pohl
A. Sommerfeld M. Wien

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin

Mit 2 Tafeln



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1931 erscheinen die Bände 8, 9, 10 u. 11 mit je 8 Heften. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 28.— zuzüglich Rm. 1.60 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 2.— für das Ausland. Redaktionsschluß am 10. November 1931.

Inhalt

	Seite
E. Goens-Charlottenburg, Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegungsschwingungen. (Mit 2 Figuren)	649
W. Külb-Nürnberg, Die Schwächung sichtbarer und ultraroter Strahlung durch künstliche Nebel und ihre Wirkung auf die Sicht. (Mit 10 Figuren)	679
M. Le Blanc und H. Sachse-Leipzig, Die Elektronenleitfähigkeit der Kupferoxyde. (Mit 5 Figuren)	727
M. Wien-Jena, Berichtigung	736
Otto Beeck und J. Carlisle Mouzon-Pasadena (Calif.), Die Ionisation von Edelgasen durch langsame Alkaliionen. Teil II: Krypton und Xenon. (Mit 3 Figuren)	737
Fritz Kirchner-München, Elektroneninterferenzen im Kristallgitter. (Mit 11 Figuren, darunter 2 Tafeln)	741
H. O. Kneser-Marburg, Zur Dispersionstheorie des Schalles. (Mit 2 Figuren)	761

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn **Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grünelsen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33**, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

A

5.

von

mo
od
Vo
ma
da
fü
Fo
er
du
Ra
—

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1931, BAND 11, HEFT 6

Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegungsschwingungen

Von E. Goens

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt)

(Mit 2 Figuren)

- l Länge des Probestabes.
 d Durchmesser (bei kreisförmigem Stabquerschnitt).
 a, b Querdimensionen (bei rechteckigem Stabquerschnitt)
($a > b$).
 q Stabquerschnitt.
 κ Trägheitsradius des Stabquerschnitts
(Kreis: $\kappa^2 = \frac{d^2}{16}$; Rechteck: $\kappa^2 = \frac{a^2}{12}$, wenn Gyra-
tionsachse $\parallel b$).
 ρ Dichte des Stabmaterials.
 E Elastizitätsmodul.
 G Torsionsmodul.
 n Schwingungszahl/sek.
 p Ordnungszahl der Eigenschwingungen.

Eine bekannte Methode zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben beruht auf der Messung der Longitudinal- oder Biegungseigenschwingungen. Sie bietet zunächst den Vorteil, daß die bei den Schwingungen auftretenden Deformationen unter normalen Anregungsbedingungen so klein sind, daß eine Überschreitung der Elastizitätsgrenze nicht zu befürchten ist¹⁾, was sich bei statischen Messungen der üblichen Form vielfach nur unter erheblicher Einbuße an Genauigkeit erreichen läßt. Weiterhin hat das Verfahren neuerdings dadurch an Wert gewonnen, daß sich mit Hilfe der modernen Röhrensender die Eigenfrequenzen sehr viel exakter ermitteln

1) Vgl. E. Grüneisen, Verhandl. d. Phys. Ges. S. S. 469. 1906.

lassen, so daß sie nunmehr zu den sichersten formelmäßigen Bestimmungsstücken bei der Berechnung des Elastizitätsmoduls gehören.

Experimentell kann man entweder in der Weise vorgehen, daß man die im Hörbarkeitsbereich liegenden Eigentöne des Probestabes durch Anschlag erregt und durch Schwebungsvergleich mit einem Röhrentonsender mißt, oder indem man die Eigenschwingungen des Stabes mit Hilfe elektroelastischer Effekte (Piezoelektrizität, Magnetostriktion) durch einen Sender anregt, dessen zu messende elektrische Frequenz auf die betreffende mechanische Eigenfrequenz des Stabes abgestimmt ist. Letztere Methode hat es auch ermöglicht, Eigenschwingungen sehr hoher Ordnungszahl anzuregen und zu messen. Da indes die unmittelbare elektroelastische Erregung auf einen kleinen Kreis von Materialien, die solche Effekte zeigen, beschränkt ist, kommt als allgemeinste und einfachste Methode hauptsächlich die erstere in Frage.

Für kürzere Stäbe bedeutet das eine Beschränkung auf die Biegungsschwingungen, da die Longitudinalschwingungen, die an und für sich aus theoretischen und praktischen Gründen zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls besser geeignet sind, dann meist außerhalb der Grenze bequemer Hörbarkeit liegen und überdies zur hörbaren Anregung einer gewissen Stabdicke bedürfen. Unter den Biegungsschwingungen eignen sich wiederum am besten die des beiderseits freien, an Knotenpunkten aufgehängten Stabes, da diese am wenigsten gedämpft sind und sich für sie die theoretischen Grenzbedingungen physikalisch am einwandfreiesten realisieren lassen. Die folgenden Ausführungen beschäftigen sich daher ausschließlich mit der letztgenannten Schwingungsart.

I. Theorie der Biegungsschwingungen eines Stabes nach Rayleigh und Timoschenko

Eine eingehende Darstellung der Theorie der Biegungsschwingungen findet sich bei Rayleigh¹⁾, durchgeführt wird die Rechnung allerdings nur für den Fall, daß die Rotationsenergie der Querschnitte zu vernachlässigen ist, d. h. wenn

1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, (Dtsch. Ausg.) (1879) I, Kap. 8.

die Querdimensionen klein gegen die Stablänge sind. Er erhält so die bekannte Differentialgleichung:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\pi^2 E}{\varrho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

(x -Achse: Stabachse, Biegungsebene: (x, y)), die durch den Ansatz

$$y = \cos \omega t \left[A \cos \frac{mx}{l} + B \sin \frac{mx}{l} + C \operatorname{Cof} \frac{mx}{l} + D \operatorname{Sin} \frac{mx}{l} \right]$$

befriedigt wird, wo m mit ω durch die Gleichung:

$$(2) \quad \omega = 2 \pi n = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\varrho}} m^2$$

verknüpft ist. Die Randbedingungen des beiderseits freien Stabes $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$ liefern dann für m die Gleichung

$$(3) \quad \cos m \cdot \operatorname{Cof} m = 1$$

oder, falls man den Koordinatenanfang nicht wie Rayleigh an das Stabende, sondern in die Stabmitte legt, die äquivalenten Teilgleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} p = 2s + 1 & \operatorname{tg} \frac{m}{2} + \operatorname{Tg} \frac{m}{2} = 0 \\ p = 2s & \operatorname{ctg} \frac{m}{2} - \operatorname{Ctg} \frac{m}{2} = 0. \end{cases}$$

Die Wurzeln von (3) bzw. (4) bestimmen dann mittelst (2) die Reihe der Eigenfrequenzen, andererseits folgt aus (2)

$$(5) \quad E_0 = \frac{4 \pi^2 \varrho l^4 n^2}{\pi^2 m^4}.$$

Der Index 0 an E soll die vorstehende Berechnungsweise des Elastizitätsmoduls gegenüber späteren kennzeichnen. Gl. (2) bzw. (5) findet man gewöhnlich in den Lehrbüchern angegeben. Schon für $p > 2$ unterscheiden sich die m um weniger als 0,01 Proz. von $(2p + 1) \frac{\pi}{2}$; in Tab. 1 sind die Zahlenwerte von m , m^2 , m^4 für die ersten 6 Eigenschwingungen aufgeführt.

Um auch der Rotationsenergie der Querschnitte wenigstens annähernd Rechnung zu tragen, ist dann noch von Ray-

leigh ein Korrektionsfaktor abgeleitet worden.¹⁾ Für den Elastizitätsmodul nach (5) hat er die Form $\left(1 + \sigma(m) \frac{x^2}{l^2}\right)$ und soll im folgenden mit R bezeichnet werden, also

$$(6) \quad E_R = E_0 \cdot R = E_0 \cdot \left(1 + \sigma(m) \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Im Falle des beiderseits freien Stabes ist $\sigma(m) = 6m\varphi(m) + m^2\varphi^2(m)$, $\varphi(m) = (\text{Etg } m - \text{ctg } m)^{-1.2}$ Drückt man $\varphi(m)$ durch das halbe Argument aus, so wird

$$\varphi(m) = 2 \left[\left(\text{Etg } \frac{m}{2} - \text{ctg } \frac{m}{2} \right) + \left(\text{Tg } \frac{m}{2} + \text{tg } \frac{m}{2} \right) \right]^{-1}$$

oder nach (4)

$$(7) \quad p = 2s + 1 \quad \varphi(m) = \text{Tg } \frac{m}{2}, \quad p = 2s \quad \varphi(m) = \text{Etg } \frac{m}{2}.$$

$\varphi(m)$ ist nur für den Grundton merklich von 1 verschieden (vgl. Tab. 1).

Tabelle 1

p	m	m^2	m^4	$\varphi(m)$	$\varphi^2(m)$	$m\varphi(m)$	$m^2\varphi^2(m)$	$\sigma(m)$
1	4,7300	22,37 ₉	500,56	0,9825	0,9653	4,647	21,60	49,48
2	7,8532	61,67 ₉	3803,5	1,0008	1,0016	7,859	61,77	108,9
3	10,996	120,90	14618	0,9999 ₇	0,9999 ₄	= m	= m^2	186,9
4	14,137	199,86	39944	1	1	= m	= m^2	284,7
5	17,279	298,56	89135	1	1	= m	= m^2	402,2
6	20,420	416,99	173881	1	1	= m	= m^2	539,5

Nun zeigen z. B. bereits Biegungsschwingungsmessungen von Grüneisen³⁾ an kreiszylindrischen Metallstäben, besonders aber neuere Untersuchungen von Giebe und Scheibe⁴⁾ an piezoelektrisch erregten rechteckigen Quarzstäben, daß selbst Formel (6) vielfach für eine Wiedergabe der experimentellen Ergebnisse nicht ausreicht. Praktisch findet das darin seinen Ausdruck, daß die aus den Eigenschwingungen verschiedener Ordnungszahl berechneten E_R nicht konstant

1) Lord Rayleigh, a. a. O. § 186.

2) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 22. S. 801. 1907, § 2. Die vorstehende Arbeit bzw. die Fortsetzung Ann. d. Phys. 25. S. 825. 1908 werden in nachfolgendem mit I und II zitiert werden.

3) E. Grüneisen, I. S. 812.

4) E. Giebe u. A. Scheibe, Ztschr. f. Instr. 47. S. 276. 1927; Jahrb. f. drahtl. Telegr. 35. S. 165. 1930.

sind, sondern mit wachsendem p ständig abnehmen. Während bei den Grüneisenschen Messungen, die über den ersten Oberton nicht hinausgehen, die Abnahme von E_R gegenüber dem aus dem Grundton berechneten Wert nur etwa 1—2 Proz. beträgt, würde sie bei den Messungen von Giebe und Scheibe in der gleichen Darstellungsweise für höhere Ordnungszahlen¹⁾ Beträge von über 50 Proz. erreichen. Eine befriedigende Wiedergabe ihrer Ergebnisse konnten die letztgenannten Autoren erst dadurch erzielen, daß sie in dem Rayleighschen Korrektionsgliede $\sigma(m)$ durch einen empirischen Zahlenfaktor erweiterten, der erfahrungsgemäß nur von der Orientierung der untersuchten Quarzstäbe abhing.

Die Ursache dieser Abweichung liegt offenbar darin, daß in solchen Fällen die Rayleighschen Ansätze die Deformationsvorgänge nicht mehr ausreichend beschreiben. Eigene Messungen an Metallstäben, die ebenfalls das Absinken von E_R mit steigendem p deutlich zeigten, gaben daher Veranlassung, nach einer leistungsfähigeren Theorie zu suchen. Eine solche fand sich in einer bereits 1921 von Timoschenko²⁾ allerdings nur im Ansatz mitgeteilten Erweiterung der Theorie der Biegungsschwingungen, die aber anscheinend bisher noch keine praktische Anwendung gefunden hat. Die nachfolgenden Ausführungen sollen sich daher näher mit ihr beschäftigen und ihre Brauchbarkeit an Hand besonderer Messungen dartun.

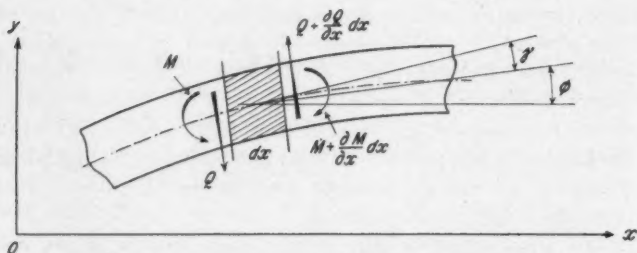
Der Fortschritt der Timoschenkoschen Ansätze besteht darin, daß neben der Rotationsträgheit auch die Scherung der Stabelemente³⁾ mit in Rechnung gezogen wird, derzufolge im allgemeinen die Tangente der Biegungskurve $\partial y / \partial x$ nicht mehr mit der Querschnittsnormalen zusammenfällt, sondern sich von ihr um den Scherungswinkel γ unterscheidet (vgl.

1) Es gelang ihnen, bei manchen Proben Eigenschwingungen bis zur 44. Ordnung anzuregen und zu messen.

2) S. P. Timoschenko, Phil. Mag. 41. S. 744. 1921. Die im Titel angegebene Beschränkung auf prismatische Stäbe ist unnötig, sie gilt ihrer Ableitung nach für beliebige Querschnitte, soweit für sie die Größe ζ (s. w. u.) angebbar ist.

3) Unter Stabelement ist hier der von zwei benachbarten Stabquerschnitten im Ruhezustand begrenzte Elementarkörper verstanden.

Fig. 1). Bezeichnet man den Winkel der Querschnittsnormalen mit der x -Achse mit Φ , so besteht also für kleine Elongationen die Beziehung $\frac{\partial x}{\partial y} = \Phi + \gamma$.



M Biegemoment, Q scherende Kraft

Fig. 1 (nach Timoschenko)

Aus den Bewegungsgleichungen für die translatorische und rotatorische Bewegung eines Stabelements erhält Timoschenko folgende Differentialgleichungen

$$(8a) \quad \rho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{Gq}{\zeta} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0,$$

$$(8b) \quad E \kappa^2 q \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \frac{Gq}{\zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \Phi \right) - \rho q \kappa^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = 0$$

und hieraus durch Elimination von Φ

$$(9) \quad \frac{E \kappa^2}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \kappa^2 \left(1 + \zeta \frac{E}{G} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho \zeta \kappa^2}{G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0.$$

Bei der Ableitung von (8a, b) ist die gesamte am Querschnitt q angreifende scherende Kraft in der Form $\frac{G}{\zeta} q \gamma$ angesetzt. ζ (in der Bezeichnungsweise von Timoschenko $1/\lambda$) ist eine Konstante, die annähernd der ungleichmäßigen Verteilung der Schubspannung über den Querschnitt Rechnung trägt und nur von der Form des letzteren abhängt. Für den rechteckigen Querschnitt ist nach Föppl¹⁾ $\zeta = \frac{6}{5} = 1,20$ für den kreisförmigen $\zeta = \frac{10}{9} = 1,11$.

1) A. Föppl, Vorl. über techn. Mech. III. 1897 § 24 und S. 163. ζ wird hier mit κ bezeichnet.

Auf eine strenge Lösung der vorstehenden Differentialgleichung unter Hinzunahme der Randbedingungen wird in der Timoschenkoschen Arbeit verzichtet, sondern nur für den Fall des an beiden Enden gestützten Stabes die Abweichung gegenüber den Rayleighschen Ergebnissen abgeschätzt, indem der diesem Fall entsprechende Rayleighsche Lösungsansatz $y = \cos \omega t \cdot \cos ax$ als Näherung in (9) eingeführt wird. Hieraus folgt dann ein Korrektionsfaktor an der einfachen Frequenzformel, der in einer zweiten Mitteilung¹⁾ mit Näherungswerten verglichen wird, die aus der strengen Lösung des Problems der Ausbreitung von Biegungswellen in unendlich langen Stäben von kreisförmigem bzw. schmalrechteckigem Querschnitt nach Pochhammer, bzw. nach Timoschenko²⁾ abgeleitet werden. Die gefundene Übereinstimmung ist befriedigend und wird für den kreisförmigen Querschnitt bei Verwendung des Föppl'schen ζ noch verbessert.

In dem vorliegenden Fall war das von Timoschenko benutzte Approximationsverfahren nicht anwendbar, da die Elongationen hier keine rein harmonischen Ortsfunktionen sind. Um daher möglichst voraussetzungslos vorzugehen, wurde (8), (9) für den Fall des beiderseits freien Stabes zunächst streng gelöst und daraus Näherungsformeln entwickelt.

Der Umstand, daß ζ nicht streng berechenbar ist, bedingt natürlich eine gewisse Unsicherheit in (8), (9) und den aus ihnen hervorgehenden Formeln. Bei den erwähnten Lösungen für unendlich lange Stäbe fehlt diese Schwierigkeit, dem gegenüber können sie für Stäbe endlicher Länge höchstens bei sehr hohen Ordnungszahlen einigermaßen zutreffen. Letzteres scheinen die Doerfflerschen Messungen an schwingenden Quarzplatten in befriedigender Weise experimentell zu bestätigen.³⁾

Zur Durchführung der Lösung von (8), (9) werde das Koordinatensystem in die Stabmitte gelegt. Setzt man y in der Form

1) S. P. Timoschenko, Phil. Mag. 43. S. 125. 1922.

2) L. Pochhammer, Journ. f. reine u. angew. Math. 81. S. 335. 1876 bzw. S. P. Timoschenko, a. a. O.; in einer Arbeit v. H. Doerffler, Ztschr. f. Phys. 63. S. 30. 1930, ist letztere Lösung nochmals unabhängig von E. Madelung gegeben.

3) H. Doerffler, a. a. O.

$C \cos \omega t \cdot \exp. \left(\frac{\lambda k x}{l} \right)$ an, wo in Analogie zu (2) k mit ω durch die Gleichung

$$(10) \quad \omega = 2 \pi n = \frac{x}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} k^2$$

verknüpft sei, so erhält man durch Einführung von y in (9) für λ die Gleichung 4. Grades

$$(11) \quad \lambda^4 + \frac{x^2 k^2}{l^2} \left(1 + \zeta \frac{E}{G} \right) \lambda^2 - \left(1 - \frac{x^4 k^4}{l^4} \zeta \frac{E}{G} \right) = 0.$$

Führt man zur Abkürzung ein

$$(12) \quad A = \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} \left(1 + \zeta \frac{E}{G} \right), \quad B = \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} \left(\zeta \frac{E}{G} - 1 \right)$$

und

$$\beta_{\alpha} \} = \sqrt{\sqrt{B^2 k^4 + 1} \pm A k^2},$$

so wird (11)

$$(13) \quad \lambda^4 + 2 A k^2 \lambda^2 - (1 - (A^2 - B^2) k^4) = 0$$

und ihre Wurzeln sind

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm \alpha, \lambda_3, \lambda_4 = \pm i \beta.$$

Die allgemeine Lösung von (9) lautet daher

$$y = \cos \omega t \sum_{r=1}^{r=4} C_r \exp. \left(\frac{\lambda_r k x}{l} \right).$$

Führt man trigonometrische und hyperbolische Funktionen ein und spaltet die allgemeine Lösung in die Partiallösungen für ungerade und gerade Ordnungszahlen auf, so wird

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \cos \left(\frac{x}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} k^2 \right) t \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(P \operatorname{Cos} \frac{\alpha k}{l} x + Q \cos \frac{\beta k}{l} x \right) \quad p = 2s + 1 \\ \left(P' \operatorname{Sin} \frac{\alpha k}{l} x + Q' \sin \frac{\beta k}{l} x \right) \quad p = 2s. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1) Unter den Wurzeln sind im folgenden stets ihre absoluten Beträge zu verstehen.

2) Es wird hierbei vorläufig vorausgesetzt, daß $(1 - (A^2 - B^2) k^4) > 0$ ist.

Für Φ , das für die Grenzbedingungen benötigt wird, ergibt (8a) nach Einsetzen von (14) und Integration

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \cos \left(\frac{x}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} k^2 \right) t \\ \frac{k}{l} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left(P \frac{\varepsilon}{\alpha} \operatorname{Sin} \frac{\alpha k}{l} x - Q \frac{\eta}{\beta} \sin \frac{\beta k}{l} x \right) p = 2s + 1 \\ \left(P' \frac{\varepsilon}{\alpha} \operatorname{Cos} \frac{\alpha k}{l} x + Q' \frac{\eta}{\beta} \cos \frac{\beta k}{l} x \right) p = 2s. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Hierbei ist $\frac{\varepsilon}{\eta} = \sqrt{B^2 k^4 + 1} \pm B k^2$ gesetzt ($\varepsilon \cdot \eta = 1$).

Die Grenzbedingungen für den beiderseits freien Stab lauten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} - \Phi = 0 \quad \text{für } x = \pm \frac{l}{2}.$$

Man erhält sie zwangsläufig bei der Behandlung des Problems mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips. Sie drücken aus, daß an den Stabenden Bieugungsmoment und scherende Kraft verschwinden (Timoschenko, a. a. O., Gl. 4). In Verbindung mit den zusammengehörigen Partiallösungen aus (14) und (15) liefern sie je zwei homogene lineare Gleichungen in P und Q bzw. P', Q' .

$$\begin{array}{l} p = 2s + 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \operatorname{Cos} \frac{\alpha k}{2} P - \eta \cos \frac{\beta k}{2} Q = 0 \\ \frac{1}{\alpha} \operatorname{Sin} \frac{\alpha k}{2} P + \frac{1}{\beta} \sin \frac{\beta k}{2} Q = 0 \end{array} \right. \\ p = 2s \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \operatorname{Sin} \frac{\alpha k}{2} P' - \eta \sin \frac{\beta k}{2} Q' = 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \operatorname{Cos} \frac{\alpha k}{2} P' + \frac{1}{\beta} \cos \frac{\beta k}{2} Q' = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

und durch Nullsetzen ihrer Koeffizientendeterminanten

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 2s + 1 \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta k}{2}}{\frac{\alpha k}{2}} = -\frac{\beta \eta}{\alpha \varepsilon} = -\frac{\beta}{\alpha} \eta^2 \\ p = 2s \quad \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta k}{2}}{\frac{\alpha k}{2}} = +\frac{\beta \eta}{\alpha \varepsilon} = +\frac{\beta}{\alpha} \eta^2 \end{array} \right.$$

ausführlich geschrieben

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 2s + 1 \\ p = 2s \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{\operatorname{tg} \frac{k}{2} \sqrt{\sqrt{B^2 k^4 + 1} + A k^2}}{\operatorname{Zg} \frac{k}{2} \sqrt{\sqrt{B^2 k^4 + 1} - A k^2}} \\ \\ = - \frac{\sqrt{\sqrt{B^2 k^4 + 1} + A k^2}}{\sqrt{\sqrt{B^2 k^4 + 1} - A k^2}} \cdot \frac{\sqrt{B^2 k^4 + 1} - B k^2}{\sqrt{B^2 k^4 + 1} + B k^2} \\ \\ \frac{\operatorname{ctg} \frac{k}{2} \sqrt{\sqrt{B^2 k^4 + 1} + A k^2}}{\operatorname{Gtg} \frac{k}{2} \sqrt{\sqrt{B^2 k^4 + 1} - A k^2}} \\ \\ = + \frac{\sqrt{\sqrt{B^2 k^4 + 1} + A k^2}}{\sqrt{\sqrt{B^2 k^4 + 1} - A k^2}} \cdot \frac{\sqrt{B^2 k^4 + 1} - B k^2}{\sqrt{B^2 k^4 + 1} + B k^2} \end{array}$$

Die Wurzeln k von (17) bestimmen dann mittelst (10) die Reihe der Eigenschwingungszahlen, andererseits ist

$$(18) \quad E_T = \frac{4 \pi^2 \varrho l^4 n^3}{x^3 k^4}.$$

Der Vollständigkeit halber sei noch folgendes kurz erwähnt. Da A stets größer als B ist, wird α imaginär, wenn $A k^2 > |\sqrt{B^2 k^4 + 1}|$ oder $k^4 > \frac{1}{A^2 - B^2}$ [vergleiche auch (13)]. Trotzdem bleiben (17) sowie auch y und Φ reell, nur gehen die hyperbolischen Funktionen unter teilweiseem Zeichenwechsel in die entsprechenden trigonometrischen Funktionen über. Ferner ersieht man aus einer geeigneten graphischen Diskussion, daß (17) auch in diesem Gebiet noch reelle Wurzeln hat. Es sollte sich danach oberhalb einer gewissen Frequenzgrenze ein Wechsel im Schwingungstypus vollziehen. Für die Lage dieser Grenze ergibt die Ungleichung $k > \frac{1}{A^2 - B^2}$ in Verbindung mit (12) und (18)

$$n_{Gr} > \sqrt{\frac{G}{4 \pi^2 \varrho l^2 x^2}}.$$

Man würde sie offenbar bei Schwingungszahlen erreichen, für die die zugehörigen Wellenlängen von gleicher Größe wie die Querdimensionen der Stäbe werden.

Das vorstehende Ergebnis steht in einem gewissen Gegensatz zur Theorie für den unendlich langen Stab, nach der die

Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit abnehmender Wellenlänge stetig gegen einen Grenzwert konvergiert. Ob n_{Gr} physikalisch einen Sinn hat, ist fraglich, Voraussetzung wäre, daß die Differentialgleichungen (8), (9) auch unter so extremen Verhältnissen die Schwingungsvorgänge wenigstens qualitativ noch einigermaßen zutreffend wiedergeben. Für prismatische Quarzstäbe von einigen Millimetern Breite, wie sie von Giebe und Scheibe untersucht wurden, errechnen sich z. B. Frequenzgrenzen zwischen 10^5 bis 10^6 Hertz. Bei den Messungen der genannten Herren sind diese kritischen Werte aber nie ganz erreicht worden, soweit an Hand des zum größten Teil noch unveröffentlichten Beobachtungsmaterials, in das mir freundlichst Einblick gegeben wurde, festgestellt werden konnte; es wäre vielleicht interessant, in dieser Richtung Versuche zu unternehmen.

Wenn auch die strengen Formeln (17) in Verbindung mit (10) oder (18) bei einer vollständigen experimentellen Prüfung der Timoschenkoschen Theorie kaum zu entbehren sein werden, so sind sie doch für den allgemeineren Gebrauch viel zu umständlich. Es wurden daher einfachere Näherungsformeln entwickelt, die für Eigenschwingungen, deren Wellenlängen den Querdimensionen des Stabes nicht zu nahe kommen, also für mäßige Dimensionsverhältnisse und Ordnungszahlen die strenge Lösung hinreichend genau approximieren. Mit Rücksicht auf das Hauptziel der Arbeit, einer verbesserten Berechnung des Elastizitätsmoduls, wurde dieser Näherung, analog dem Faktor R in (6) die Gestalt eines zu (5) hinzutretenden Faktors gegeben, der im folgenden mit T bezeichnet werden soll, also

$$(20) \quad E_T = E_0 T = \frac{4 \pi^2 \varrho l^4 n^3}{\pi^2 m^4} T.$$

Der strenge Wert für T wäre wegen (5) und (18) gleich m^4/k^4 .

Die folgenden Entwicklungen setzen voraus, daß die durch (12) eingeführten Größen A und B klein gegen 1 sind. Wie weit dies der Fall ist, übersieht man ungefähr am folgenden Beispiel. Für einen kreiszylindrischen Stab mit einem Dimensionsverhältnis $\frac{d}{l} = \frac{1}{10}$ wird $A = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $B = 0,6 \cdot 10^{-3}$,

wenn man $\zeta E/G$ zu 3 annimmt. Letzteres trifft besonders für isotropes Material nahe zu, da E/G hier zwischen 2,4 und 3,0 liegt¹⁾ und demgemäß also $\left(3 - \zeta \frac{E}{G}\right)$ bei Zugrundelegung der Föppl'schen ζ für kreisförmigen Querschnitt zwischen + 0,3 und - 0,3, für rechteckigen Querschnitt zwischen + 0,1 und - 0,6 schwankt. Daraus folgt ferner, daß die Größe

$$(A - 2B) = \frac{1}{2} \frac{z^2}{l^2} \left(3 - \zeta \frac{E}{G}\right),$$

die im nachfolgenden eine Rolle spielt, im allgemeinen mindestens um eine Größenordnung kleiner sein wird als A .

Ein Verfahren zur angenäherten Bestimmung von T , das sich allerdings ohne erhebliche Komplikationen nur in erster Näherung durchführen läßt, ist das folgende. Ersetzt man in (17) k durch $\frac{m}{\sqrt{T}}$, so gehen diese Gleichungen über in

$$(21) \quad f(T, A, B) = \begin{cases} \alpha' \varepsilon' \operatorname{tg} \frac{m}{2} \beta + \beta' \eta' \operatorname{tg} \frac{m}{2} \alpha' & p = 2s + 1 \\ \alpha' \varepsilon' \operatorname{ctg} \frac{m}{2} \beta - \beta' \eta' \operatorname{ctg} \frac{m}{2} \alpha' & p = 2s \end{cases} = 0,$$

wo

$$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\sqrt{B^2 m^4 + T} - A m^2} \quad \varepsilon' = \sqrt{B^2 m^4 + T} + B m^2$$

$$\beta' = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\sqrt{B^2 m^4 + T} + A m^2} \quad \eta' = \sqrt{B^2 m^4 + T} - B m^2$$

bedeutet.

Entwickelt man $f(T, A, B)$ nach dem Taylorschen Satz ausgehend von $f(1, 0, 0)$ und beschränkt sich auf Glieder erster Ordnung, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f(T, A, B) &\sim f(1, 0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{1,0,0} (T - 1) \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{1,0,0} A + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{1,0,0} B = 0. \end{aligned}$$

1) Entsprechend einer Poissonschen Zahl μ von 0,2—0,5 nach der Beziehung $\frac{E}{G} = 2(1 + \mu)$.

$f(1, 0, 0)$ ist aber ebenfalls 0, da (21) für dieses Wertetripel in (4) übergeht. Die letzte Gleichung liefert daher als erste Näherung für T :

$$T = 1 - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{1,0,0} A + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{1,0,0} B}{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{1,0,0}}.$$

Die Ausrechnung der Differentialquotienten $\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{1,0,0}$ usw. ist etwas umständlich, wird aber durch den gleichartigen Bau von α' , β' bzw. ϵ' , η' erleichtert. Man erhält so für $p = 2s + 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{1,0,0} &= -\frac{m}{4}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{1,0,0} = m^2 \mathfrak{I}g \frac{m}{2} + \frac{1}{2} m^3 \mathfrak{I}g^2 \frac{m}{2}, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{1,0,0} &= -2 m^2 \mathfrak{I}g \frac{m}{2}, \end{aligned}$$

für $p = 2s$ kehren sich die Vorzeichen um und an die Stelle der $\mathfrak{I}g$ -Funktion tritt die $\mathfrak{E}tg$ -Funktion. Damit wird

$$T = 1 + 4(A - 2B)m \left\{ \mathfrak{I}g \frac{m}{2} + 2A m^2 \left\{ \mathfrak{I}g^2 \frac{m}{2} \right. \right. \\ \left. \left. \mathfrak{E}tg^2 \frac{m}{2} \right. \right\}$$

oder nach (7) zusammenfassend:

$$(22) \quad T = 1 + 4(A - 2B)m \varphi(m) + 2A m^2 \varphi^2(m).$$

Setzt man noch für A und B ihre Werte nach (12) ein, so wird

$$(23) \quad T = 1 + 2m \varphi(m) \frac{\kappa^2}{\bar{F}} \left(3 - \zeta \frac{E}{G} \right) + m^2 \varphi^2(m) \frac{\kappa^2}{\bar{F}} \left(1 + \zeta \frac{E}{G} \right).$$

Wie leicht ersichtlich, tritt das in m lineare Glied auch seines Koeffizienten wegen an Größe hinter den letzten Wert zurück.

Für $G = \infty$ (Nichtberücksichtigung der Scherung) geht (23) in den Rayleighfaktor nach (6) über.

Da bei der Entwicklung von $f(T, A, B)$ nur Glieder 1. Ordnung berücksichtigt wurden, wird sich die Brauchbarkeit von (23) nur auf die ersten Eigenschwingungen erstrecken.

Man kann aber auf einem anderen Wege zu einer Näherung gelangen, die sich gerade den Verhältnissen bei höheren Ordnungszahlen etwas besser anpaßt. Den Ausgangspunkt

bildet die Tatsache, daß in (17), ebenso wie in (4), die hyperbolischen Tangens bzw. Cotangens im allgemeinen schon nach den ersten Ordnungszahlen praktisch 1 werden¹⁾, ferner läßt sich der absolute Betrag der rechten Seite von (17) in folgender Weise entwickeln:

$$(24) \quad \begin{cases} 1 + (A - 2B)k^2 + \frac{1}{2}(A - 2B)^2 k^4 \\ + \frac{1}{2}[(A - B)^3 - B(A^3 - B^3)]k^6 \dots = 1 + \theta. \end{cases}$$

Setzt man noch abkürzend $\frac{k}{2} \sqrt{B^2 k^4 + 1 + A k^2} = \frac{u}{2}$, so kann man nach dem vorstehenden für (17) annähernd schreiben:

$$(25) \quad p = 2s + 1 \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = -(1 + \theta), \text{ bzw. } p = 2s \quad \operatorname{ctg} \frac{u}{2} = (1 + \theta).$$

Da A , B und besonders $(A - 2B)$ klein sind, gilt für nicht zu hohe p dasselbe auch für die in (24) unter θ zusammengefaßten Glieder, k ist daher genähert durch die Gleichung $\frac{u}{2} = \frac{\pi}{4}(2p + 1) = \frac{m}{2}$ bestimmt.

Genauer kann man setzen: $\frac{u}{2} = \frac{m}{2} + \xi$, also für (25):

$$p = 2s + 1 \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{m}{2} + \xi \right) = - \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \xi}{1 + \operatorname{tg} \xi} \right) = -(1 + \theta),$$

$$p = 2s \quad \operatorname{ctg} \frac{u}{2} = \operatorname{ctg} \left(\frac{m}{2} + \xi \right) = \frac{\operatorname{ctg} \xi - 1}{\operatorname{ctg} \xi + 1} = \frac{1 - \operatorname{tg} \xi}{1 + \operatorname{tg} \xi} = (1 + \theta),$$

wo ξ ein kleiner Winkel ist. Aus der letzten Relation in jeder Gleichung folgt übereinstimmend

$$\operatorname{tg} \xi = - \frac{\theta}{2 + \theta} \quad \text{oder} \quad \xi \sim - \frac{\theta}{2}.$$

Beschränkt man θ auf das erste Glied der Entwicklung (24), setzt also $\xi = -\frac{1}{2}(A - 2B)k^2$, so liefert die Beziehung $\frac{u}{2} = \frac{m}{2} + \xi$ für k die verbesserte Bestimmungsgleichung

$$(26) \quad \frac{k}{2} \sqrt{B^2 k^4 + 1 + A k^2} = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}(A - 2B)k^2.$$

1) Für Ordnungszahlen, für welche $k \sim \frac{1}{A^2 - B^2}$ werden, sinken zwar die genannten hyperbolischen Funktionen ebenfalls wieder unter 1, doch gelten für dieses Gebiet die nachfolgenden Entwicklungen überhaupt nicht mehr.

Daß sie auch für einen größeren Bereich von Eigenschwingungen noch einigermaßen brauchbar sein sollte, erhellt aus folgender Überlegung: es wird zwar mit zunehmendem p die Approximation von ξ durch $-\frac{1}{2}(A-2B)k^2$ immer schlechter, demgegenüber wächst aber auch $m/2$, so daß der verursachte prozentische Fehler in $\frac{m}{2} + \xi$ und damit in k in geringerem Maße ansteigen wird.

Durch die bereits früher angewandte Substitution $k = \frac{m}{\sqrt[4]{T}}$ geht (26) über in

$$\sqrt{\sqrt{B^2 m^4 + T} + A m^2} = (1 - \tau) \sqrt{T},$$

wo $\tau = (A - 2B) \frac{m}{\sqrt{T}}$ ist, und durch weitere Umformung in

$$T^2 - \frac{1}{(1 - \tau)^4} (1 + 2 A m^2 (1 - \tau)^2) T + \frac{(A^2 - B^2) m^4}{(1 - \tau)^4} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$T = \frac{1}{2(1 - \tau)^4} (1 + 2 A m^2 (1 - \tau)^2) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4(A^2 - B^2)(1 - \tau)^4 m^4}{(1 + 2 A m^2 (1 - \tau)^2)^2}} \right].$$

Das Wurzelzeichen unter der eckigen Klammer ist dabei wie vorstehend mit positivem Vorzeichen zu nehmen. Berücksichtigt man, daß der zweite Ausdruck unter dem Wurzelzeichen klein gegen 1 ist, so läßt sich der letzte Ausdruck in folgende Form bringen:

$$(27) \quad T = \frac{1}{(1 - \tau)^4} + \frac{2 A m^2}{(1 - \tau)^2} - \frac{(A^2 - B^2) m^4}{1 + 2 A m^2 (1 - \tau)^2}.$$

Da auch τ klein gegen 1 ist, weil es nur linear mit m ansteigt und $(A - 2B)$ als Faktor enthält, kann man in ihm zur Vereinfachung \sqrt{T} gleich 1 setzen und in (27) τ in den Korrektionsgliedern vernachlässigen. Dadurch geht (27) über in

$$(28) \quad T = 1 + 4(A - 2B)m + 2 A m^2 - \frac{(A^2 - B^2) m^4}{1 + 2 A m^2}.$$

Der Unterschied der vorstehenden Gleichung gegenüber (22) besteht einerseits in dem Fehlen von $\varphi(m)$ bzw. $\varphi^2(m)$ in den ersten beiden Korrektionsgliedern, andererseits in dem zusätzlichen Gliede von der Ordnung $A^2 m^4$. Beides ist aus

der Art der Ableitung von (22) bzw. (28) verständlich: erstere vernachlässigt die Glieder höherer Ordnung, letztere die Abweichung der hyperbolischen Funktionen von 1. Es wird deshalb gestattet sein, (22) und (28) in folgender Weise zu einem einheitlichen Ausdruck zusammenzufassen:

$$(29) \quad T = 1 + 4(A - 2B)m\varphi(m) + 2Am^2\varphi^2(m) - \frac{(A^2 - B^2)m^4}{1 + 2Am^2},$$

um so mehr, als $\varphi(m)$, $\varphi^2(m)$, wie bereits anfangs erwähnt, nur für den Grundton merklich von 1 verschieden ist.

Ersetzt man wieder A und B nach (12) und zugleich im letzten Gliede noch $\frac{m^4}{1 + 2Am^2}$ durch $k^4 = \frac{4\pi^2 \varrho l^4 n^2}{\pi^2 E}$, was einigermaßen zutrifft, da $(1 + 2Am^2) \sim T$ ist, so geht (29) über in

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} T = 1 + 2m\varphi(m) \frac{\pi^2}{l^2} \left(3 - \zeta \frac{E}{G} \right) + m^2\varphi^2(m) \frac{\pi^2}{l^2} \left(1 + \zeta \frac{E}{G} \right) \\ - \frac{4\pi^2 \varrho \zeta \pi^2}{G} n^2. \end{aligned} \right.$$

Die Umformung des letzten Gliedes beim Übergang von (29) auf (30) ist zweifellos etwas gewaltsam, sie ist aber für die Rechnung bequemer, da n^2 durch die Beobachtung gegeben und der Koeffizient von der Ordnungszahl unabhängig wird, zudem dürfte sie an der an und für sich vorhandenen Unsicherheit dieses Gliedes nicht viel ändern.

Um einen ungefähren Anhalt zu bekommen, wie weit die durch (22) bzw. (29) — und damit in gewissem Maße auch (30) — gegebenen Korrekturfaktoren die strenge Lösung von (17) zu ersetzen vermögen, wurden für zwei geeignet gewählte Wertpaare A und B (vgl. Tab. 2, Spalte 2) für die Ordnungszahlen $p = 1, 2, 6$ die T -Werte nach (22) bzw. (29) berechnet und mit den entsprechenden strengen Werten $T_s = \frac{m^4}{k^4}$ verglichen, bei denen k aus (17) gewonnen wurde. Die gewählten Zahlenpaare A, B entsprachen unter Annahme eines kreisförmigen Querschnitts einem Verhältnis $\frac{d}{l} \sim \frac{1}{10}$, das in der Praxis meist unterschritten wird, und Werten für E/G von 2,1 bzw. 3,5, die also den bei isotropem Material vorkommenden Bereich beiderseits um etwa 15 Proz. überschreiten. $(A - 2B)$ ist in einem Falle positiv, im anderen negativ und

Tabelle 2

		p	R	T nach (22)	T nach (29)	$T_s = \frac{m^4}{k^4}$
Fall I	$A = 1,000 \cdot 10^{-3}$	1	1,0297	1,0469	1,0465	1,0465
	$B = 0,400 \cdot 10^{-3}$	2	1,0653	1,1298	1,1270	1,1271
	$(A - 2B) = + 2,0 \cdot 10^{-4}$					
	Für kreisförm. Querschnitt:					
	$\frac{d}{l} = 0,098, \frac{E}{G} = 2,10$	6	1,3237	1,8503	1,7707	1,7705
Fall II	$A = 1,700 \cdot 10^{-3}$	1	1,0346	1,0679	1,0670	1,0668
	$B = 1,000 \cdot 10^{-3}$	2	1,0762	1,2006	1,1946	1,1948
	$(A - 2B) = - 3,0 \cdot 10^{-4}$					
	Für kreisförm. Querschnitt:					
	$\frac{d}{l} = 0,106, \frac{E}{G} = 3,47$	6	1,3777	2,3933	2,2573	2,2545

seinem Betrage nach verhältnismäßig groß. Trotz dieser absichtlich ungünstig gewählten Verhältnisse ist die Übereinstimmung zwischen den nach (29) berechneten T und den T_s noch recht gut, wie die beiden letzten Spalten der Tabelle zeigen; selbst für Fall II, $p = 6$, wo die Korrektur bereits 100 Proz. überschreitet, beträgt die Abweichung wenig über 1 Promille. Man kann erwarten, daß für kleinere Werte von A , B , $(A - 2B)$, sich die Übereinstimmung über ein entsprechend größeres Gebiet von Eigenschwingungen erstrecken wird. Merkwürdiger, schon für $p = 2$, stimmt (22) (Tab. 2, Spalte 5), ganz enorm ist natürlich der Unterschied für die in Spalte 4 vergleichsweise angegebenen Werte von R .

II. Experimentelle Prüfung der Theorie

Um den Grad der Brauchbarkeit der Timoschenkoschen Theorie an experimentellen Daten zu erproben, scheinen zunächst Messungen der piezoelektrisch erregten Biegeschwingungen von Quarzstäben am besten geeignet, da sich bei den hier erreichbaren Eigenfrequenzen hoher Ordnungszahlen Unzulänglichkeiten der Theorie bzw. Fortschritte gegenüber der bisherigen besonders deutlich ausprägen müßten. In einer in Vorbereitung befindlichen Veröffentlichung der Herren

Gieße und Scheibe, in der ein ausgedehntes experimentelles Material über Biegungsschwingungen von Quarzstäben beigebracht werden wird, soll eine solche Prüfung durchgeführt werden. Ein gewisses Bedenken besteht allerdings insofern, als es sich in dem erwähnten Falle um *Kristallstäbe* handelt, bei denen die Biegungsvorgänge im allgemeinen komplizierter verlaufen. In dieser Hinsicht ist es immerhin ein Vorteil, auch der Timoschenkoschen Differentialgleichungen, daß bei ihrer Ableitung keine Isotropie von E und G vorausgesetzt wird, es ist daher wahrscheinlich — und experimentelle Befunde scheinen das zu bestätigen — daß bei mäßiger Anisotropie und geeigneter kristallographischer Orientierung (drillungsfreie Biegung) die Ergebnisse der Theorie bis zu einem gewissen Grade auch auf den Fall des anisotropen Stabes übertragen werden können.

Um jedoch eine einwandfreie, wenn auch weniger umfassende Prüfung an isotropem Material zu ermöglichen, wurden an drei kreiszylindrischen Stäben (10×250 , 10×180 , 10×120 mm) aus gezogenem ungetempertem Silberstahl, von denen die beiden letzten durch sukzessive Verkürzung aus dem ersten hervorgehen, sowie an einem getemperten prismatischen Aluminiumstab ($7 \times 10 \times 250$ mm) die im akustischen Gebiet erreichbaren Biegungseigenschwingungen, die sich z. T. bis zur 5. Ordnungszahl erstreckten, sorgfältig gemessen.

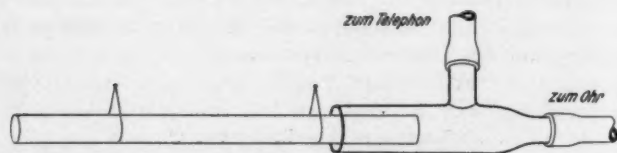


Fig. 2

Die Stäbe wurden hierzu horizontal in zwei geeigneten Schwingungsknoten des betreffenden Eigentons an Fadenschlingen aufgehängt. Zum Abhören der Töne ragte ein Stabende in den einen erweiterten Schenkel eines T-förmigen Glasrohrs hinein (Fig. 2), auf dessen andere Schenkel Gummischläuche

aufgezogen waren, die zum Ohr bzw. zu einem schalldicht gekapselten Telephon führten, das durch Kopplung mit einem Hilfston sender erregt wurde. Die Frequenz des Hilfssenders wurde dann auf den betreffenden Eigenton des durch Anschlag erregten Stabes vermittelt der akustischen Schwebungen abgestimmt und mit Hilfe eines Normaltonsenders von Grüneisen und Merkel¹⁾ gemessen.

Da der Vergleichston ein Dauerton ist, nutzt man die gesamte Abklingungszeit des Stabes für den Schwebungsvergleich aus, wodurch sich eine sehr genaue Einstellung erzielen läßt. Ferner ist wesentlich, daß man durch Veränderung der Telephonkopplung auf bequeme Weise den Vergleichston der mittleren Tonstärke des Eigentons anpassen kann.

Bei hohen Schwingungszahlen, bei denen sich Interferenzerscheinungen in den Rohrleitungen störend bemerkbar machten, erwies es sich in einzelnen Fällen zweckmäßiger, den Telephon schall einem hinter dem Stabe aufgestellten Trichter zuzuführen und die Schwebungen mit dem Stabton mit freiem Ohr abzuhören.

An dem Stahlstab konnten an allen drei Längen und bei allen Ordnungszahlen stets nur einfache Eigenschwingungen beobachtet werden, während kreiszylindrische Stäbe sonst im allgemeinen die lästige Eigenschaft besitzen, infolge geringer dimensioneller und struktureller Abweichungen von der Axialsymmetrie zwei benachbarte Eigenschwingungen zu geben, deren Schwingungsebenen den Ebenen größten und kleinsten Biegemoments entsprechen. Da sie häufig akustisch miteinander interferieren, ist ihre getrennte Messung sehr erschwert.

Bei dem Aluminiumstab wurden die Eigenschwingungen für beide möglichen Schwingungsebenen, also parallel zur größeren und zur kleineren Kante bestimmt.

Zu erwähnen ist noch, daß auch der longitudinale Grundton des Stahlstabes (10×250 mm) und des Aluminiumstabes gemessen wurden.

Da die Schwebungen zwischen Stabton und Vergleichston gut zu hören waren, mit Ausnahme der höchsten tonschwachen Biegungschwingungen, deren Messung schon eine gewisse

1) E. Grüneisen u. E. Merkel, Ztschr. f. Phys. 2. S. 277. 1920.

Übung erforderte, kann man die relative Meßgenauigkeit der Schwingungszahlen auf wenige Zehntausendstel veranschlagen.

Besondere Vorkehrungen zur Erhaltung der Temperaturkonstanz waren nicht getroffen, doch variierte die Zimmertemperatur, die an einem neben den Stab hängenden Thermometer kontrolliert wurde, während der Messung einer zusammengehörigen Reihe von Eigenschwingungen nur um wenige Zehntel Grad. Ferner wurde beim Umhängen des Probestabes auf die verschiedenen Knotenpunkte eine direkte Berührung mit der Hand vermieden und meistens auch die Stäbe durch eine vorgesetzte Glasplatte vor Anblasen geschützt. Da die Temperaturkoeffizienten der Elastizitätsmoduln nur wenige $10^{-4}/\text{Grad}$ betragen¹⁾, ist ein ins Gewicht fallender Temperatureinfluß nicht anzunehmen. Überdies wurden zur Vermeidung eines systematischen Fehlers die Eigentöne nicht in der Reihenfolge ihrer Ordnungszahlen gemessen.

Die Stablängen wurden mit Normalmaßstab oder Schublehre die Dicken mit einem Zeiss'schen Schraubenmikrometer an einer ganzen Reihe von gleichmäßig über den Stab verteilten Punkten gemessen. Aus den gefundenen Stabdimensionen und dem Stabgewicht wurde die Dichte ermittelt, die zur Berechnung der Absolutwerte von E und G erforderlich war. Der Torsionsmodul, der zur Berechnung von E/G benötigt wird, ergab sich bei dem Stahlstab (10×250 mm) aus dem Grundton der Torsionsschwingungen, der nach dem üblichen Verfahren²⁾ angeregt und mit dem Normaltonsender gemessen wurde. An dem prismatischen Aluminiumstab wurde G zunächst statisch bestimmt³⁾, nachträglich gelang es auch, nach dem Verfahren von F. A. Schulze⁴⁾ den Torsionsgrundton anzuregen. Die statisch und dynamisch gefundenen G stimmten auf ~ 1 Proz. überein (vgl. Tab. 4), ihre Berechnung erfolgte nach den Formeln

$$G_{\text{stat}} = \frac{M}{f(u) a b^3 \vartheta} \quad \text{bzw.} \quad G_{\text{dyn}} = \frac{\delta P (1 + u^2) n_{\text{tors}}^2}{3 f(u)},$$

1) E. Goens, Ann. d. Phys. [5] 4. S. 733. 1930.

2) Vgl. z. B. F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik 1930. § 67, III.

3) Die Messung wurde entgegenkommenderweise im Staatl. Materialprüfungsamt ausgeführt, wofür ich Hrn. Direktor Prof. Memmler und Hrn. Prof. Stahmer auch an dieser Stelle bestens danken möchte.

4) Vgl. Fußnote 1 auf S. 669.

wo M Drehungsmoment (cm/dyn), ϑ Verdrillungswinkel/cm, n_{tors} Torsionsgrundfrequenz, $u = \frac{a}{b}$

$$f(u) = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{1}{u} \left[\mathfrak{I}g \frac{\pi u}{2} + \frac{1}{3^5} \mathfrak{I}g \frac{3\pi u}{2} \dots \right]$$

bedeutet.¹⁾

Um an dem so erhaltenen Beobachtungsmaterial die Brauchbarkeit der Formel (20) in Verbindung mit (30) zu prüfen und das Ergebnis mit dem entsprechenden der Formel (5) und (6) zu vergleichen, genügt es offenbar, innerhalb einer zusammengehörigen Reihe von Eigenfrequenzen den Grad der Konstanz der Größen $\frac{n^2}{m^4}$, $\frac{n^2}{m^4} R$, $\frac{n^2}{m^4} T$ an Stelle der der E -Werte in Abhängigkeit von der Ordnungszahl festzustellen, da die übrigen Parameter in alle drei Formeln (20), (5), (6) und für alle Ordnungszahlen gleichmäßig eingehen.

Die diesbezüglichen Ergebnisse sind für die Stahlstäbe in Tab. 3, für den Aluminiumstab in Tab. 4 zusammengestellt. Im Kopf der Tabellen finden sich die Zahlenwerte für die Dimensionen, die berechnete Dichte, sowie die für die Ausrechnung von R und T erforderlichen Größen. Da sich der Stahlstab (10×250 mm) bei der Dickenmessung als ausgezeichnet rund und gleichförmig erwies, konnte der ermittelte Wert von d auch auf die verkürzten Stäbe übertragen werden, das gleiche geschah für ρ und E/G . Über den Tabellen sind noch die Formeln für R und T mit den numerischen Koeffizienten angegeben. Das Innere der Tabellen enthält die einfachen und quadratischen Werte der Eigenschwingungszahlen, soweit diese beobachtet werden konnten und die hiermit berechneten Größen $\frac{n^2}{m^4}$, $\frac{n^2}{m^4} R$, $\frac{n^2}{m^4} T$ neben letzteren sind die zugehörigen R und T noch besonders angegeben.

Um sicher zu sein, daß sich die nach (30) berechneten T -Werte in genügender Übereinstimmung mit den strengen Werten $T_s = \frac{m^4}{k^4}$ befanden, wurden letztere für einige Eigen-

1) Für die Berechnung von G_{stat} vgl. Geiger-Scheel, Handb. d. Phys. VI. S. 152 Gl. 6, für G_{dyn} : F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 13. S. 583. 1904. (In der letzten Gleichung auf S. 584 fehlt das Wurzelzeichen über {...}!)

Tabelle 3

Stahlstab, kreisförmig (10 × 250 mm)

$$d = 0,998_3 \text{ cm} \quad \frac{d^3}{l^3} = 1,596 \cdot 10^{-3} \quad \frac{E}{G} = 2,55_9$$

$$R = (1 + 0,991 \cdot 10^{-4} \sigma(m))^{1/3}$$

$$l = 25,07 \text{ cm} \quad \varphi_{\text{ber.}} = 7,86_4 \left(1 + \zeta \frac{E}{G}\right) = 3,84_1 \quad T = (1 + 3,15 \cdot 10^{-5} m \varphi(m) + 3,80_7 \cdot 10^{-4} m^3 \varphi^3(m) - 2,6 \cdot 10^{-11} n^2)^{1/3}$$

p	n	$n^3 \cdot 10^{-6}$	$\frac{n^3}{m^3}$	$\frac{d}{l}$ in %	R	$\frac{n^3}{m^3} \cdot R$	$\frac{d}{l}$ in %	T	$\frac{n^3}{m^3} \cdot T$	$\frac{d}{l}$ in %
1	727,8 ₉	0,5298 ₁	1058 ₄	—	1,004 ₉	1063 ₉	—	1,008 ₃ *	1067 ₉	—
2	1991 ₇₀	3,967 ₅	1043 ₁₁	-1,5	1,010 ₉	1054 ₄	-0,9	1,023 ₇	1067 ₉	+0,0 ₆
3	3864 ₁₁	14,93 ₁	1021 ₁₅	-3,5	1,018 ₈	1040 ₄	-2,2	1,046 ₁	1068 ₁₄	+0,1 ₁
4	6301 ₉₅	39,71 ₀	994 ₁₁	-6,1	1,028 ₉	1022 ₂₃	-3,9	1,075 ₆	1069 ₁₉	+0,1 ₉
5	9260	85,73 ₉	961 ₁₉	-9,1	1,040 ₉	1000 ₄	-6,0	1,112 ₉ *	1069 ₉₅	+0,2 ₃

$$n_{\text{tors}} = 6438$$

$$G_{\text{dyn}} = 8,19_4 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

$$n_{\text{long}} = 10\,285$$

$$E_{\text{long}} = 20,91 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

$$E_{\text{deg}} = 21,01 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

derselbe Stab, gekürzt (10 × 180 mm)

$$d, \varphi, \frac{E}{G} \text{ wie oben} \quad l = 18,02 \text{ cm} \quad \frac{d^3}{l^3} = 3,069 \cdot 10^{-3} \quad R = (1 + 1,91_9 \cdot 10^{-4} \sigma(m))^{1/3}$$

$$T = (1 + 6,1_9 \cdot 10^{-5} m \varphi(m) + 7,36_9 \cdot 10^{-4} m^3 \varphi^3(m) - 2,6 \cdot 10^{-11} n^2)^{1/3}$$

1	1404 ¹⁸	1,973 ₉	3942 ₂₉	—	1,009 ₉	3979 ₁₇	—	4005 ₁₇	—
2	3818 ₁₁	14,57 ₉	3832 ₁₇	— 2,8	1,020 ₉	3912 ₁₀	— 1,4	4007 ₉	+ 0,0 ₅
3	7337 ¹⁰	53,83 ₉	3683 ₁₀	— 6,6	1,035 ₉	3815 ₁₀	— 4,2	4008 ₁	+ 0,0 ₇
4	11834	140,0 ₁	3506 ₁₁	— 11,1	1,054 ₉	3697 ₁₄	— 7,1	4012 ₁₅	+ 0,1 ₇

$$d, \varphi, \frac{E}{G} \text{ wie oben} \quad l = 12,00_5 \text{ cm} \quad \frac{d^3}{l^3} = 6,91_5 \cdot 10^{-3} \quad R = (1 + 4,38_2 \cdot 10^{-4} \sigma(m))^{1/3} \quad T = (1 + 1,37 \cdot 10^{-5} m \varphi(m) + 16,60 \cdot 10^{-4} m^3 \varphi^3(m) - 2,6 \cdot 10^{-11} n^2)^{1/3}$$

d, \varnothing, \bar{G}	wie oben	$l = 12,00, \text{ cm}$	$\frac{d^2}{l^3} = 6,91 \cdot 10^{-8}$	$T = (1 + 1,37 \cdot 10^{-4} m \varphi(m) + 16,60 \cdot 10^{-4} m^3 \varphi^3(m) - 2,6 \cdot 10^{-11} n^2)^{1/2}$	$\frac{d^2}{l^3} = 6,91 \cdot 10^{-8}$	$\frac{d^2}{l^3} = 6,91 \cdot 10^{-8}$	$\frac{d^2}{l^3} = 6,91 \cdot 10^{-8}$	$\frac{d^2}{l^3} = 6,91 \cdot 10^{-8}$	$\frac{d^2}{l^3} = 6,91 \cdot 10^{-8}$	$\frac{d^2}{l^3} = 6,91 \cdot 10^{-8}$
1	3134 ₉	9,82 ₅	1962 ₅	1,021 ₄	2004 ₅	—	1,036 ₅	2033 ₅	—	—
2	8980 ₅	70,23 ₅	1846 ₅	1,047 ₁	1933 ₅	- 5,9	1,101 ₅	2034 ₅	+ 0,0 ₅	+ 0,0 ₅
3	3818 ₁	14,57 ₅	3832 ₇	—	3912 ₅	- 2,8	1,045 ₅	4007 ₅	- 1,4	- 1,4
2	7397 ₅	53,83 ₅	3683 ₅	- 6,6	3815 ₅	- 6,6	1,035 ₅	4008 ₅	- 4,2	- 4,2
4	11834	140,0 ₅	3506 ₅	- 11,1	3697 ₅	- 11,1	1,144 ₅	4012 ₅	- 7,1	- 7,1

Tabelle 4

Aluminiumstab, prismatisch (7 × 10 × 250 mm)

$$a = 0,977, \text{ cm}$$

$$E/G = 2,52_5$$

$$(1 + \zeta E/G) = 4,03_4$$

$$b^2/l^3 = 0,776_5 \cdot 10^{-3}$$

$$a^2/l^3 = 1,53_1 \cdot 10^{-3}$$

$$R = (1 + 1,27_6 \cdot 10^{-4} \sigma(m))^{1/2}$$

$$T = (1 - 8,7 \cdot 10^{-6} m \varphi(m) + 5,14_6 \cdot 10^{-4} m^3 \varphi^3(m) - 3,8 \cdot 10^{-11} n^2)^{1/2}$$

Schwingungsebene || a

p	n	$n^2 \cdot 10^{-6}$	$\frac{n^2}{m^4}$	$\frac{A}{\text{in } \%}$	R	$\frac{n^2}{m^4} \cdot R$	$\frac{A}{\text{in } \%}$	T	$\frac{n^2}{m^4} \cdot T$	$\frac{A}{\text{in } \%}$
1	803,0 ₁	0,6448 ₅	1288 ₅	—	1,006 ₅	1286 ₅	—	1,011 ₅	1302 ₄	—
2	2191 ₇	4,803 ₅	1263 ₅	- 2,0	1,013 ₅	1280 ₅	- 1,2	1,031 ₅	1302 ₇	+ 0,0 ₅
3	4237 ₅	17,95 ₅	1228 ₅	- 4,7	1,023 ₅	1257 ₄	- 3,0	1,061 ₄	1303 ₅	+ 0,0 ₅
4	6881 ₁	47,35 ₅	1185 ₅	- 8,0	1,036 ₅	1228 ₅	- 5,2	1,100 ₅	1305 ₅	+ 0,2 ₅

$$R = (1 + 0,647 \cdot 10^{-4} \sigma(m))^{1/2}$$

$$T = (1 - 4,4 \cdot 10^{-6} m \varphi(m) + 2,61_1 \cdot 10^{-4} m^3 \varphi^3(m) - 19 \cdot 10^{-11} n^2)^{1/2}$$

Schwingungsebene || b

p	n	$n^2 \cdot 10^{-6}$	$\frac{n^2}{m^4}$	$\frac{A}{\text{in } \%}$	R	$\frac{n^2}{m^4} \cdot R$	$\frac{A}{\text{in } \%}$	T	$\frac{n^2}{m^4} \cdot T$	$\frac{A}{\text{in } \%}$
1	573,5 ₅	0,3280 ₅	657,2 ₅	—	1,003 ₅	659,3 ₅	—	1,005 ₅	660,9 ₅	—
2	1572 ₇	2,473 ₅	650,3 ₅	- 1,1	1,007 ₅	654,9 ₅	- 0,7	1,016 ₅	660,7 ₅	- 0,0 ₅
3	3061 ₅	9,37 ₅	641,0 ₅	- 2,5	1,012 ₅	648,8 ₅	- 1,6	1,03 ₅	661,1 ₅	+ 0,0 ₅
4	5013 ₇	25,13 ₅	629,3 ₅	- 4,3	1,018 ₅	640,9 ₅	- 2,8	1,051 ₅	661,7 ₅	+ 0,1 ₅
5	7406 ₁	54,85 ₅	615,3 ₅	- 6,4	1,026 ₅	631,3 ₅	- 4,2	1,076 ₅	662,6 ₅	+ 0,2 ₅

$$\eta_{\text{tors}} = 5510$$

$$G_{\text{dyn}} = 2,70 \cdot 10^{11}$$

$$G_{\text{stat}} = 2,67_5 \cdot 10^{11}$$

$$\left. \begin{array}{l} G_{\text{dyn}} = 2,70 \cdot 10^{11} \\ G_{\text{stat}} = 2,67_5 \cdot 10^{11} \end{array} \right\} 2,69 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

$$\eta_{\text{long}} = 1045$$

$$E_{\text{long}} = 6,80_1 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

$$E_{\text{bteg}} (|| a) = 6,79_5 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

$$E_{\text{bteg}} (|| b) = 6,80_1 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

1) $\sigma(m), m \varphi(m), m^3 \varphi^3(m)$ vgl. Tab. 1.

schwingungen stichprobenweise berechnet (in Tab. 3 und 4 in Spalte T mit * bezeichnet). Die Abweichung der Näherungswerte gegenüber den T_0 überstieg, wie zu erwarten war, nirgends 0,01 Proz., war also für die vorliegenden Zwecke belanglos.

In den mit Δ überschriebenen Spalten sind endlich für die Oberschwingungen die Abweichung der Größen

$$\frac{n^2}{m^4}, \frac{n^2}{m^4} R, \frac{n^2}{m^4} T$$

von den entsprechenden Werten für die Grundschwingung in Prozenten angegeben, die den Grad der Konstanz nach den einzelnen Berechnungsweisen übersehen lassen. Man erkennt an Hand dieser Spalten sofort den erheblichen Fortschritt, den die Timoschenkoschen Ansätze für die Theorie der Biegungsschwingungen bedeuten, zumal der Korrektionsfaktor T keinerlei den Beobachtungen angepaßte empirische Koeffizienten enthält. Ein systematischer Gang in den Δ ist aber zweifellos auch im letzteren Fall noch vorhanden, und zwar im Gegensatz zu dem Δ der Rayleighkorrektur im Sinne eines schwachen Anstiegs.

Noch günstiger gestalten sich die vorstehenden Ergebnisse, wenn man die Berechnung des Elastizitätsmoduls selbst ins Auge faßt. Denn der Gesamtfehler des hinzutretenden Aggregats der Lineardimensionen in höherer Potenz und der Dichte [vgl. (20)] wird auch in günstigen Fällen einige Promille betragen, demgegenüber der beobachtete Gang der Δ im Gebiet der akustischen Frequenzen wenig ausmacht. In dieser Hinsicht ist auch der Unterschied der aus dem Grundton berechneten E_R und E_T für ein Verhältnis Dicke zu Länge $< \frac{1}{10}$ noch nicht wesentlich, eher schon für E_0 und E_T , wie man aus dem Beispiel der beiden längeren Stahlstäbe und des Aluminiumstabes nach Tab. 3 und 4 ersieht. Dagegen beträgt z. B. bei dem kürzesten Stahlstab $\left(\frac{d}{l} = \frac{1}{12}\right)$ für die gleiche Ordnungszahl der Unterschied zwischen E_R und E_T bereits $1\frac{1}{2}$ Proz., zwischen E_0 und E_T sogar $3\frac{1}{2}$ Proz. Für den ersten Oberton sind vollends die Abweichungen von E_T durchweg merklich.

An Hand der mitgeteilten numerischen Koeffizienten überschlägt man übrigens leicht, daß in den vorliegenden Fällen

das 1. und 3. Korrektionsglied in T gegenüber dem 2. nur eine bescheidene Rolle spielt, man sieht daraus, daß man sich in der Praxis bei der Berechnung von E_T aus den ersten Eigenschwingungen meist auf letzteres Glied wird beschränken können.

Die aus den Werten $\frac{n^2}{m^4} T$ für die Grundschnwingungen der einzelnen Proben abgeleiteten Elastizitätsmoduln (E_{bieg}) sind am Fuße der Tab. 3 und 4 bzw. deren Teiltabellen zusammen mit dem aus dem longitudinalen Grundton berechneten (E_{long}) angegeben. Bei dem getemperten Aluminiumstab ist die Übereinstimmung von E_{long} mit den E_{bieg} der beiden Schwingungsebenen sehr gut, bei dem Stahlstab stimmen zwar die für die drei Längen berechneten E_{bieg} ebenfalls gut überein, dagegen liegt ihr Mittel etwa um 0,6 Proz. oberhalb von E_{long} , was sich allein kaum durch Meßunsicherheit erklären läßt. Möglicherweise ist die Ursache in dem bereits von Grüneisen diskutierten Umstände zu suchen, daß durch den Ziehvorgang in den Stäben eine axialsymmetrische Inhomogenität hervorgerufen werden kann. Da für die Biegungsschnwingungen hauptsächlich die Eigenschaften der äußeren Schichten, für die Longitudinalschnwingungen dagegen der Mittelwert über den gesamten Querschnitt maßgebend ist, läßt sich in solchen Fällen ein Unterschied zwischen E_{long} und E_{bieg} erwarten. Da der Stahlstab nicht getempert war, mag eine derartige Schichtung sehr wohl vorhanden gewesen sein.

In Tab. 5 sind noch Messungen an dünneren Messingstäben aus einer früheren Untersuchung¹⁾ verwertet, bei denen zum Teil auch der erste Oberton mitbestimmt wurde. Die Bezeichnung der Stäbe entspricht ihren ungefähren Abmaßen in Millimeter, die genauen Werte finden sich a. a. O., in der Tabelle sind nur die d^2/l^2 angegeben, nach denen sich die Messungen ordnen. Bestimmt wurde nur der 1. und 2. Eigen-ton, die Schwingungszahlen bilden das Mittel, je zweier um einiger Promille verschiedener Werte, die von einer gewissen axialen Unsymmetrie der Stäbe herrühren. Die seinerzeit ermittelten Torsionsmoduln sind in der letzten Spalte angegeben.

1) E. Goens, a. a. O. Die Schwingungszahlen für den 1. Oberton waren hier weggelassen.

Tabelle 5

Stab	$\frac{d^2}{l^2} \cdot 10^3$	p	n	$\frac{p^2}{10^{-6}}$	$\frac{n^2}{m^2}$	Δ %	R	$\frac{n^2}{m^2} \cdot R$	Δ %	T	$\frac{n^2}{m^2} \cdot T$	Δ %	E_T $\cdot 10^{11} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$	G_{dyn} $\cdot 10^{-11} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$
$M(3 \times 90)$	$1,07_s$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1127 \\ 3089 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1270_s \\ 9,540_7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2537_s \\ 2508,4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,2 \\ -1,2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,003_s \\ 1,007_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2546_{90} \\ 2526_{77} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,8 \\ -0,8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,006_s \\ 1,017_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2552_{18} \\ 2552_{11} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,0_3 \\ -0,0_3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10,53 \\ 10,53 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3,54 \\ (3,60) \end{smallmatrix}$
$M(4 \times 100)$	$1,58_s$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1250 \\ 3419 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,561_s \\ 11,69_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3120_s \\ 3073_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,5 \\ -1,5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,004_s \\ 1,010_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3135_{18} \\ 3107_{90} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,9 \\ -0,9 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,008_s \\ 1,025_7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3148_{11} \\ 3152_{90} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} +0,1_s \\ +0,1_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10,54 \\ 10,54 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} (3,60) \\ (3,60) \end{smallmatrix}$
$M(3 \times 70)$	$1,84_s$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1931 \\ 5272 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3,727_9 \\ 27,79_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 7448 \\ 7309 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,9 \\ -1,9 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,005_7 \\ 1,012_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 7490 \\ 7400 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,2 \\ -1,2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,010_4 \\ 1,023_9 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 7525_7 \\ 7527_7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} +0,0_3 \\ +0,0_3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10,63 \\ 10,63 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \end{smallmatrix}$
$M(5 \times 100)$	$2,46_s$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1547 \\ 4214 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2,392_s \\ 17,75_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4780_{12} \\ 4668_{90} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -2,3 \\ -2,3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,007_s \\ 1,016_7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4816_{18} \\ 4746_{90} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,4 \\ -1,4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,013_8 \\ 1,039_8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4846_{18} \\ 4854_{11} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} +0,1_7 \\ +0,1_7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10,61 \\ 10,61 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3,54 \\ 3,54 \end{smallmatrix}$

Tabelle 6

Stab	d cm	l cm	$\frac{d^2}{l^2} \cdot 10^3$	$\frac{E}{G}$	p	n	R	E_R [kg/mm ²]	Δ %	T	E_T [kg/mm ²]	Δ %	$\frac{E_{long}}{E_{stat}}$ [kg/mm ²]
Au I	1,208	26,99	2,00 _s	2,99	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 294_{10} \\ 804 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,006_s \\ 1,013_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 7820 \\ 7760 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,9 \\ -0,9 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,011_s \\ 1,032_4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 7860 \\ 7900 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} +0,5 \\ +0,5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ 7780 \end{smallmatrix}$
Au II	1,155	27,69	1,73 _s	2,87	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 270_{11} \\ 738 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,005_4 \\ 1,011_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 8010 \\ 7900 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,3 \\ -1,3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,008_s \\ 1,027_5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 8040 \\ 8020 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -0,2 \\ -0,2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 8100 \\ 8120 \end{smallmatrix}$
Pd	1,610	26,98	3,56 _s	2,20	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 608_s \\ 1651 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,011_s \\ 1,024_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 11760 \\ 11550 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -1,7 \\ -1,7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1,017_7 \\ 1,049_s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 11830 \\ 11830 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \pm 0,0 \\ \pm 0,0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 11470 \\ 11480 \end{smallmatrix}$

Die Δ beziehen sich auf die unabgerundeten Werte.

Für den vorliegenden Zweck genügte es, bei der Berechnung von T mit einem Mittelwert für $\frac{E}{G} = 3,00$ zu rechnen. Im übrigen entspricht die Anlage der Tab. 5 den vorangehenden. Auch hier ist die Verbesserung der Übereinstimmung bei Anwendung der Timoschenkokorrektur gegenüber der Rayleighkorrektur deutlich zu erkennen, obwohl die Meßgenauigkeit gegenüber den vorangehenden Ergebnissen sicherlich geringer ist. Die in der vorletzten Spalte angegebenen E_T stimmen mit Rücksicht auf die verschiedene thermische Behandlung der Stäbe gut genug überein.

Da an den Proben der Tab. 3—5 mit Ausnahme von $M(3 \times 70)$ durchweg E und G gleichzeitig gemessen wurden, kann man sich an Hand der für isotropes Material gültigen Beziehung $\frac{1}{G} = \frac{3}{E} - \frac{\kappa}{3}$ (κ kubische Kompressibilität) einen Überblick über den Grad der Isotropie der Proben verschaffen, denn da $\frac{\kappa}{3}$ gegenüber $\frac{3}{E}$ zurücktritt genügt eine angenäherte Kenntnis dieser Größe. Nimmt man für $\kappa_{\text{Stahl}} = 6,0 \cdot 10^{-13}$, $\kappa_{\text{Al}} = 13,7 \cdot 10^{-13}$, $\kappa_{\text{Messing}} \sim 8,0 \cdot 10^{-13}$ 1), so berechnet sich $\frac{1}{G} \left(\text{in } 10^{-13} \frac{\text{cm}^2}{\text{dyn}} \right)$ für den Stahlstab zu 12,3 gegenüber 12,2 beob., für den Aluminiumstab 39,6 gegenüber 37,2 beob., für die Messingstäbe fast übereinstimmend 26 gegenüber 28 beob. Während also für den Stahlstab die Isotropiebedingung ganz erfüllt ist, zeigen die anderen Proben deutliche Abweichungen, ohne daß die Timoschenkosche Formel deshalb merklich schlechter stimmte.

Zum Schluß schien es noch ganz interessant festzustellen, welche Konsequenzen sich aus der veränderten Berechnungsweise von E_{bleg} für die Grüneisenschen Messungen ergeben. In Tab. 6 sind für die 3 kreiszylindrischen Stäbe Au I, Au II, Pd, bei denen neben dem Grundton auch der 1. Oberton gemessen war, die E_R nach Grüneisen bzw. die neu berechneten E_T für beide Eigentöne zusammengestellt. Die Werte für E/G in Spalte 4 wurden aus dem direkt gemessenen E und G (Grüneisen I, Tab. 2) gebildet. Man sieht, daß die

1) Landolt-Börnstein, Tabellen und Ergänzungsbände.

bereits von Grüneisen betonte Diskrepanz zwischen den aus beiden Eigentönen berechneten Elastizitätsmoduln jedenfalls für Au II und Pd wesentlich verringert wird, obwohl alle drei Stäbe zweifellos nur unvollkommen isotrop und homogen sind. In besonderem Maße gilt das von dem Palladiumstab, der nicht nur eine sehr erhebliche Abweichung zwischen der aus E und G berechneten und der aus der Querkontraktion bestimmten Poissonschen Konstante zeigt [0,101! gegen 0,393 (vgl. Grüneisen II, Tab. 15)], sondern auch zwischen E_{bieg} und E_{stat} (E_{long}) (vorstehende Tab. 6). Wenn trotzdem die aus beiden Eigentönen berechneten E_T gut übereinstimmen, so mag das zum Teil daran liegen, daß eine Störung der Biegungseigenschwingungen in ihrem Verhältnis zueinander in erster Linie durch Homogenitätsänderungen in der Längsrichtung bewirkt werden wird, während axialsymmetrische Inhomogenität sowie homogen verteilte statistische Anisotropie (Vorzugslagen der Kristallite) ohne erheblichen Einfluß sein sollten.

An den übrigen untersuchten Stäben ist E_{bieg} lediglich aus dem Grundton bestimmt, trotzdem führt die Umrechnung der Zahlenwerte zu einem Ergebnis, das vielleicht erwähnt zu werden verdient. Vergleicht man nämlich in der Grüneisen'schen Zusammenstellung (I, Tab. 8) die E_{bieg} mit den E_{stat} (E_{long}) so sieht man, daß für über die Hälfte der gezogenen Stäbe (7 von 12), die im Vergleich zu den gegossenen als das einwandfrei Material anzusehen sind, $E_{\text{bieg}} < E_{\text{stat}}$ (E_{long}) ist, bei drei von ihnen (Au II, Manganin, Konstantan) beträgt die Unterschreitung sogar über 1 Proz. (vgl. vorl. Tabb. 6 und 7). Bei Anwendung des Timoschenkofaktors wird in diesen Fällen die Differenz $E_{\text{bieg}} - E_{\text{stat}}$ bei der Mehrzahl praktisch 0 [Konstantan, Manganin (vgl. Tab. 7), Ni, Fe I, allenfalls noch Al (- 0,3 Proz.)]

Tabelle 7

Stab	d cm	l cm	$\frac{d^2}{l^3}$ · 10 ³	$\frac{E}{G}$	R	E_R [kg/mm ²]	T	E_T [kg/mm ²]	$\frac{E_{\text{long}}}{E_{\text{stat}}}$ [kg/mm ²]
Konst.	1,997	26,96	5,49	2,66	1,016 ₉	16360	1,029 ₄	16560	16590
Mang.	1,806	26,94	4,49	2,66	1,013 ₉	12500	1,024 ₁	12630	12600 12640

oder ein geringes größer (Stahl + 0,5 Proz.), einzig bei Au II bleibt die Unterschreitung außerhalb der Fehlergrenze, wenngleich sie sich von - 1,3 Proz. auf 0,9 Proz. verringert (vgl. Tab. 6). Bei den übrigen Stäben würde natürlich die schon vorhandene Überschreitung von E_{stat} durch die Umrechnung noch vergrößert werden. Nimmt man hinzu, daß auch unter den 13 gegossenen Stäben in derselben Tabelle nur für einen (Zn II) $E_{\text{bieg}} < E_{\text{stat}} (E_{\text{long}})$ bleiben würde, so scheint das Beobachtungsmaterial der Tabelle in seiner Gesamtheit in noch viel ausgesprochenerem Maße wie bisher darauf zu deuten, daß die Ursachen, die zu einer Unstimmigkeit zwischen den Elastizitätsmoduln Anlaß geben, ganz überwiegend in dem Sinne wirken, daß der aus Biegungsbeanspruchung abgeleitete Modul größer herauskommt, als der aus longitudinaler Beanspruchung bestimmte. Eine nähere Begründung für dies Verhalten dürfte sich ohne Kenntnis der inneren Struktur der Proben aber kaum geben lassen.

Bei der Behandlung der theoretischen Fragen hat mir Hr. Prof. v. Laue liebenswürdigerweise mehrfach mit seinem Rat zur Seite gestanden, wofür ich ihm auch an dieser Stelle bestens danken möchte.

Zusammenfassung

1. Erweiterte Differentialgleichungen für die Biegungsschwingungen eines Stabes, die 1921 von Timoschenko angegeben wurden und die gegenüber den Rayleighschen Ansätzen auch der mit der Biegung verbundenen Scherung der Stabelemente genähert Rechnung tragen, werden für den Fall des beiderseits freien Stabes streng gelöst und hieraus Näherungsformeln für die Berechnung des Elastizitätsmoduls abgeleitet, die für mäßig hohe Ordnungszahlen der Biegungseigenschwingungen die strenge Formel gut approximieren.

2. Zur Prüfung der Theorie wurden an drei kreiszylindrischen Stahlstäben (10×250 , 10×180 , 10×120 mm) und einem prismatischen Aluminiumstab ($7 \times 10 \times 250$ mm) die im akustischen Gebiet erreichbaren Biegungseigenschwingungen, teilweise bis zur 5. Ordnung, durch Schwebungsvergleich mit einem Normalröhrentonsender sorgfältig gemessen. Es ergab sich,

daß bei allen Proben die Elastizitätsmoduln, die nach den abgeleiteten Formeln aus den Eigenschwingungen verschiedener Ordnung berechnet wurden, eine wesentlich bessere Übereinstimmung zeigten, als nach den Rayleighschen Formel, besonders bei gedrungener Stabform. Mit dem gleichen Ergebnis konnten auch einige frühere Messungen des Verf. sowie von E. Grüneisen verwertet werden.

3. Die ersterwähnten Messungen zeigen zugleich, daß sich mit Hilfe eines Röhrentonsenders solche im akustischen Bereich liegenden Eigenschwingungen bis herauf zu Schwingungszahlen von über 10000 Hz sehr genau und bequem messen lassen.

4. Unter Benutzung der genannten theoretischen und technischen Hilfsmittel erweisen sich die Biegungseigenschwingungen für die genaue Bestimmung des Elastizitätsmoduls als sehr geeignet.

(Eingegangen 29. Juli 1931)

Die Schwächung sichtbarer und ultraroter Strahlung durch künstliche Nebel und ihre Wirkung auf die Sicht

Von W. Külb¹⁾

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Erlangen)

(Mit 10 Figuren)

Inhalt: § 1. Fragestellung und kurzer Überblick über die Literatur. — § 2. Untersuchungen von künstlichen Nebeln. — § 3. Vergleich der Ergebnisse mit der Theorie. — § 4. Einfluß der Veränderung einer Strahlung durch Nebel auf die Sicht. — § 5. Erkennbarkeit einer Lichtquelle im Nebel. — § 6. Erkennbarkeit eines Objektes im Nebel bei diffuser Beleuchtung (Tageslicht). — § 7. Erkennbarkeit eines Objektes im Nebel bei einseitiger direkter Beleuchtung. — § 8. Bemerkungen zur Empfängerfrage.

Übersicht

Gemessen wurde die spektrale Durchlässigkeit einiger künstlicher Nebel (Säurenebel, Nebel aus SiCl_4 und NH_3 , Nebel aus TiCl_4 , Chlorzinknebel, Schwarznebel, Kalizuckerrauch) für die Wellenlängen $0,4\text{--}4,0\ \mu$. Es wurde untersucht, wie sich die Schwächung auf Streuung und Absorption verteilt.

Es wurden allgemeine Gesichtspunkte über Sichtverhältnisse in trüben Medien entwickelt und Mittel zur Verbesserung besprochen.

§ 1. Fragestellung und kurzer Überblick über die Literatur

Über die Veränderung (Zerstreuung, Absorption) von Strahlung des sichtbaren und der anschließenden Spektralgebiete und die Auswirkung dieser Veränderung auf die Sicht ist noch wenig bekannt. Die vorliegende Arbeit soll hierzu einen Beitrag liefern. Begonnen wurde mit der Untersuchung von Naturnebeln. Da diese infolge des hierfür ungünstigen Klimas am Ort nicht zu Ende geführt werden konnte und künstlicher Wassernebel von der Art des Naturnebels nicht haltbar genug

1) Erlanger Dissertation.

herzustellen war, wurden die Untersuchungen an künstlichen Nebeln durchgeführt.

Zunächst einen kurzen Überblick über die auf diesem Gebiet zu Beginn dieser Arbeit (Oktober 1929) vorliegenden Veröffentlichungen:

Am nächsten kommen in der Fragestellung die Arbeiten von Haecker¹⁾, Rudolph²⁾ und Werner.³⁾ Hiervon ist die Arbeit von Haecker wegen der Abhängigkeit der Ergebnisse von physiologischen Vorgängen im Auge für allgemeine Schlußfolgerungen nicht brauchbar.⁴⁾ Werner untersucht die Schwächung sichtbarer Strahlung durch künstlichen Wassernebel. Es gelingt ihm nicht, für die von ihm festgestellte Abhängigkeit der Schwächung von der Tropfengröße des Nebels bzw. der Wellenlänge der Strahlung eine Gesetzmäßigkeit zu finden, so daß eine Verallgemeinerung seiner Ergebnisse nicht möglich ist. Rudolph stellt fest, daß die Schwächung durch Naturnebel im sichtbaren Gebiet von kurzen nach längeren Wellen hin schwach zunimmt. Die übrigen Arbeiten, die im weiteren Sinne mit diesen Fragen zusammenhängen, lassen sich in drei Gruppen zusammenfassen:

1. Arbeiten über Lichterscheinungen im Nebel, aber mit anderer Fragestellung.
2. Untersuchungen über die Wirkung kleiner Teilchen auf auffallende kurzwellige elektromagnetische Strahlung.
3. Untersuchungen über den Einfluß geringer Trübungen der Atmosphäre auf die Sicht.

Auch bei Zusammenfassung des gesamten Materials konnte daraus nur in geringem Maß auf die bei Naturnebeln oder künstlichen Nebeln auftretenden Erscheinungen geschlossen werden. Erwarten durfte man: Eine erhebliche Abnahme der Schwächung durchgehender Strahlung mit zunehmender Wellenlänge (wenn auch nicht mit der vierten Potenz der Wellenlänge) und einen Einfluß des gestreuten Lichtes auf den Erkennungsvorgang.

Hier sollen noch kurz zwei einschlägige Arbeiten besprochen werden, welche nach Beginn dieser Arbeit veröffentlicht wurden,

1) G. Haecker, Bestimmung des Transparenzkoeffizienten des Nebels. Diss. Kiel 1905.

2) A. Rudolph, Phys. Ztschr. 5. S. 36. 1904.

3) O. Werner, Ann. d. Phys. 70. S. 480. 1923.

4) F. Löhle, Ztschr. f. techn. Phys. 10. S. 428. 1929.

und zwar als erste die Untersuchung der Durchlässigkeit von Naturnebeln (in der Nähe der See) durch Granath und Hulburt.¹⁾ Diese fanden eine geringe Zunahme der Durchlässigkeit von $0,4-0,7 \mu$, während sie von da an bis etwa 3μ gleich blieb. Dabei wurden die Werte von $0,4-0,7 \mu$ durch Auswertung von Spektralaufnahmen gewonnen. Im Ultraroten wurde nicht spektral zerlegt, sondern versucht, zwei Meßpunkte bei etwa $1,4 \mu$ und 3μ dadurch zu gewinnen, daß durch Filter bzw. durch Ersatz der im Sichtbaren verwandten Wolframbogenlampe durch eine Heizspule das Schwergewicht der Strahlung im Spektrum nach den angegebenen Wellenlängen verschoben wurde. Die Energieverteilungskurven zeigen jedoch, daß hierbei vor allem bei 3μ nur ein schlecht ausgesprochenes Maximum erzielt wurde.

Wesentlich ausführlicher ist die Arbeit von Anderson.²⁾ Dieser untersuchte künstlichen Nebel — seiner Ansicht nach Wassernebel — in geschlossenem Gefäß. Bemerkenswert ist vor allem die kunstreiche Versuchsanordnung, bei der an Mühe und Mitteln nicht gespart ist. Es gelang ihm, recht beständigen Nebel zu erzeugen und zwar anscheinend auch solchen von beträchtlicher Tropfengröße (Anhaltspunkte für die absolute Größe werden nicht gegeben). Letzteres gelang ihm allerdings nur dadurch, daß er hygroskopische Kerne ($MgCl_2$) einführte. Es handelt sich also eigentlich nicht mehr um reinen Wassernebel, sondern ebenso wie bei unseren Versuchen um künstlichen Nebel. Leider entsprechen seine Ergebnisse, wenigstens soweit das ultrarote Gebiet in Frage kommt, nicht ganz dem Aufwand, da die Trennung der Spektralbereiche nur durch Filter vorgenommen wurde. Es gelang ihm daher, im Ultraroten nur zwei Bereiche auszusondern und zwar von $0,70$ bis $1,2 \mu$ und $1,05-2,7 \mu$. Angaben über die Verteilung innerhalb dieser Bereiche fehlen. Die Ergebnisse sind hauptsächlich in zwei Diagrammen verwertet, welche die Durchlässigkeit in Abhängigkeit von der Wellenlänge zeigen. Die Diagramme sind in einem Bericht von Gresky³⁾ wiedergegeben und es wird daher auf diese verwiesen. Die Beurteilung der Kurven wird dadurch erschwert, daß die Durchlässigkeit in Prozenten auf-

1) L. P. Granath u. E. O. Hulburt, Phys. Rev. **34**. S. 140. 1929.

2) S. H. Anderson, The Aviation **38**. S. 930. 1930.

3) G. Gresky, Phys. Ztschr. **32**. S. 193. 1931.

getragen ist. Die besonders wichtigen Werte bei starken Schwächungen sind daher an einem Ende zusammengedrängt und unsicher. Außerdem ist bei dieser Art der Auftragung nicht zu erkennen, daß die Verhältnisse der Schwächungskoeffizienten für verschiedene Spektralgebiete mit der Dichte schwanken. Den Verf. scheint diese Tatsache allerdings, wie aus seiner Bemerkung über das Überschneiden der Kurven für Blau und Grün hervorgeht, nicht zu überraschen. Bei der Berechnung über den Sichtgewinn wählt er andererseits ohne Rücksicht auf die dabei angenommene größere Dichte des Nebels unbedenklich von den verschiedenen Verhältniswerten der Schwächungskoeffizienten denjenigen, welcher im Ultraroten die größte Sichtweite ergibt. Im übrigen sind die von ihm in der Tabelle angegebenen Entfernungen für eine Schwächung auf jeweils 1 Proz. mit 0,666 zu multiplizieren, da ihm bei der Rechnung ein Irrtum ($\log^{10} 100:3,0$ statt 2,0) unterlaufen ist. Wenn Anderson, wie auch Granath und Hulburt für die Schwächung einer Strahlung durch Nebel die Formel $J = J_0 \cdot e^{-(a + b/\lambda^2)}$ angibt und sie als Rayleighsches Gesetz bezeichnet, so ist dies in dieser Form nicht richtig. Rayleigh hat das Gesetz $J = J_0 \cdot e^{-c/\lambda^2}$ für die Zerstreuung an Teilchen, welche klein gegenüber der Wellenlänge sind, aufgestellt und es entsteht nur eine — übrigens unbrauchbare — empirische Näherungsformel, wenn man versucht, diese Beziehung durch Hinzufügung eines konstanten Gliedes für die Zerstreuung an größeren Teilchen umzuformen.

§ 2. Untersuchungen von künstlichen Nebeln

1. Schwächung eines parallelen Strahlenbündels

Sämtliche Versuche wurden im Keller des Physikalischen Instituts vorgenommen, wo drei zusammenhängende Räume und ein Vorraum zur Verfügung standen (vgl. Fig. 1). Zur Untersuchung der spektralen Abhängigkeit der Schwächung eines Parallelstrahls durch künstliche Nebel wurde an einem Ende der zu vernebelnden Räume die Lichtquelle mit Hohlspiegel (750 mm Durchmesser, 325 mm Brennweite), am anderen Ende ein großer Planspiegel aufgestellt, durch welchen der Strahl rechtwinklig auf eine in der Türe zum Vorraum angebrachte Sammellinse (17 cm Durchmesser, 1 m Brennweite) umgelenkt wurde. Die aufgefangene Strahlung wurde in einem Monochromator spektral zerlegt und gemessen. Durch Vergleich der

ohne und mit Nebel gemessenen Werte wurde die Schwächung in dem jeweiligen Spektralgebiet ermittelt. Um dabei den Einfluß der Dichteschwankungen des Nebels auszuschalten, wurde unmittelbar nach jeder Messung die Schwächung in einem bestimmten Spektralgebiet mitgemessen.

Die Ausscheidung eines solchen engen Spektralgebietes, welches in der Folge als Vergleichswellenlänge bezeichnet werden soll, wurde in folgender Weise vorgenommen:

Der an der Vorderseite des Prismas reflektierte Teil der Strahlung wurde mittels einer Linse auf ein zweites Thermo-

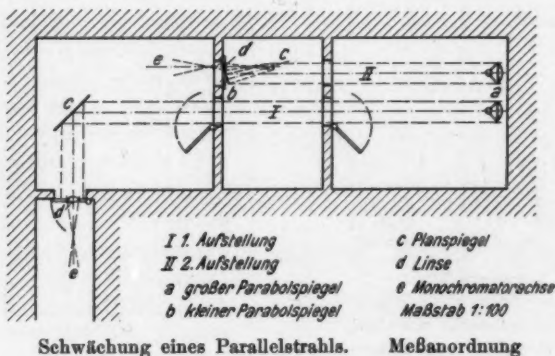
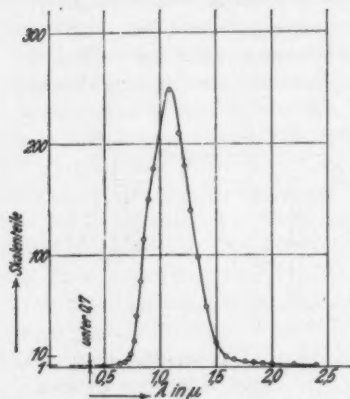


Fig. 1

element gesammelt, welchem ein Filter vorgeschaltet war, um aus einem Bereich des Gesamtspektrums, in welchem auch bei starker Vernebelung noch genügend Energie durchdringen konnte, die Vergleichswellenlänge auszusondern. Am günstigsten erwies sich eine Zusammenstellung von 5 mm Wasser und einem Ultraviolettglas (Schott UG8; 8 mm st.), wobei das Wasser das Spektrum nach langen Wellen, das Glas das Spektrum nach dem Sichtbaren zu abschneidet. Das Glas selbst war 8 mm stark und erschien in der Durchsicht violett. Die Wiederzunahme der Durchlässigkeit im kurzwelligen Gebiet hat aber, wie aus dem Diagramm hervorgeht, infolge der hier geringen Intensität der gesamten Anordnung keinen Einfluß.

Als Lichtquelle diente eine Wolframpunktlichtlampe (7,5 Amp., 55 Volt), welche leider meist ans Netz angeschlossen werden mußte. Um den Einfluß der Spannungsschwankungen

zu vermindern, wurde daher nachts gemessen, wo sich diese in ertr \ddot{a} glichen Grenzen bewegten. Die Stromaufnahme der Lampe wurde dauernd \ddot{u} berwacht. Nach l \ddot{a} ngerer Benutzung verursachte das Abbr \ddot{o} ckeln kleiner Teilchen von der Kathode hier und da Helligkeitsschwankungen. Im \ddot{u} brigen waren die von der Lampe herr \ddot{u} hrenden Schwankungen gering gegen \ddot{u} ber den Schwankungen, welche durch Dichteschwankungen des Nebels entstanden.



Energieverteilung der zum Vergleich verwendeten Strahlung
(Vergleichswellenl \ddot{a} nge)

Lichtquelle: Wolframbogenlampe.
Filter: Ultraviolettglas + 5 mm H $_2$ O

Fig. 2

Die Zerst \ddot{a} ubung der Nebel konnte von au \ddot{u} en geregelt werden. Bei der verh \ddot{a} ltnism \ddot{a} Big langen Me \ddot{s} strecke gen \ddot{u} gte eine geringe Nebeldichte. Diese wurde im Mittel so gew \ddot{a} hlt, da \ddot{s} im Sichtbaren gerade noch gemessen werden konnte. Zur genaueren Messung im langwelligen und im sichtbaren Teil des Spektrums wurde dann der Nebel noch verst \ddot{a} rkt bzw. geschw \ddot{a} cht. Im Verlauf einer Messung war es \ddot{o} fters notwendig, den Lichter werden den Nebel wieder zu verst \ddot{a} rken.

Bei der Auswertung wurde die Beziehung $J = J_0 \cdot e^{-k \cdot c \cdot d}$ zugrunde gelegt, wobei d die Schichtdicke, c die Dichte (Teilchenzahl/Volumeneinheit) und k die (frequenzabh \ddot{a} ngige) Schw \ddot{a} chung durch ein Teilchen bezeichnet. Hiervon ist d w \ddot{a} hrend der Messung konstant, c kann f \ddot{u} r einen Wert und den unmittel-

Untersucht wurden zun \ddot{a} chst folgende „Nebel“:

S \ddot{a} urenebel (entwickelt durch Zerst \ddot{a} uben der Nebels \ddot{a} ure; diese nach Angaben der Hersteller: Aufl \ddot{o} sung von Schwefels \ddot{a} ureanhydrid in Schwefels \ddot{a} urechlorhydrin);
Kalizuckerrauch (entwickelt durch Verbrennen von Kaliumchlorat und Zucker);
Salmiaknebel (entwickelt durch Zerst \ddot{a} uben von Ammoniak und Salzs \ddot{a} ure).

Der Nebel wurde im ersten Raum entwickelt und durch den Zug des Ventilators verteilt. Die Zerst \ddot{a} ubung

bar nachher gemessenen Vergleichswert der Vergleichswellenlänge als gleich angenommen werden. Aus dem Ausdruck $\ln \frac{(J_0/J)_\lambda}{(J_0/J)_\nu}$, wobei λ eine Wellenlänge im untersuchten Bereich, ν die Wellenlänge des Vergleichsspektrums bedeutet, erhält man $\frac{k_\lambda}{k_\nu}$, also das Verhältnis der Schwächungskoeffizienten, welches — strenge Gültigkeit des Exponentialgesetzes vorausgesetzt — von Schichtdicke und Dichte unabhängig sein müßte.

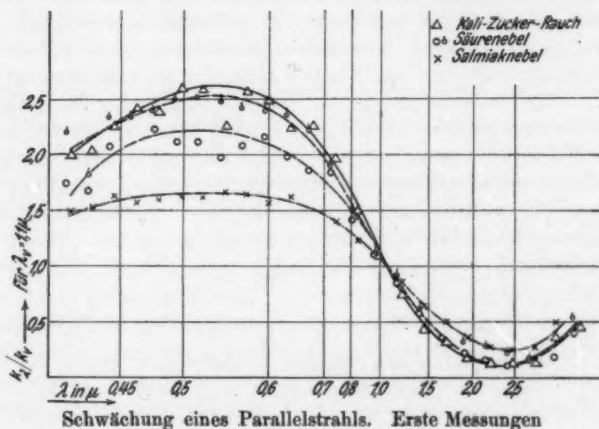


Fig. 3

In Fig. 3 sind einige Ergebnisse der ersten Messungen eingetragen und zwar mit den Wellenlängen als Abszissen (absichtlich nicht entzerrt, um die Verteilung der Meßpunkte zu zeigen) und dem Verhältnis $\frac{k_\lambda}{k_\nu}$ als Ordinaten. Aus dem Zusammenlaufen sämtlicher Kurven im Schnittpunkt mit der Ordinate 1 würde sich die Vergleichswellenlänge, wenn sie nicht bekannt wäre, sofort ergeben. Im übrigen zeigen die Kurven im Ultraroten einen ziemlich gleichen Verlauf, während sie im Sichtbaren weiter auseinanderliegen. Außerdem streuen die Werte im Sichtbaren bedeutend mehr. Im ganzen ergibt sich wenigstens für Säurenebel und Kalizuckerrauch eine recht beträchtliche Abnahme des Schwächungskoeffizienten mit zunehmender Wellenlänge. Auffällig war der scheinbare Wiederanstieg bei etwa $2,5 \mu$, welcher in Folge der in diesem Spektralgebiet starken

Absorption der Glasapparatur nicht zweifelsfrei festgestellt werden konnte. Die weiteren Messungen über die gleiche Meßstrecke (15 m) und solche über eine Strecke von 7,5 m bestätigen im wesentlichen dieses Ergebnis. Es zeigten sich aber im Sichtbaren öfters größere Abweichungen (ähnlich wie im Diagramm beim Kalizuckerrauch), nämlich das Herausfallen jeder dritten Messung aus dem sonstigen Verlauf der Kurve. Dies entspricht der Reihenfolge der Messungen und deutet also auf eine Änderung der Versuchsbedingungen während einer Meßreihe. Es lag nahe, die erwähnte Änderung der Nebeldichte, für welche die jeweilige Schwächung der Vergleichswellenlänge einen Anhalt bot, zur Deutung heranzuziehen. Nach dem Ansatz $\frac{k_1}{k_0} = \ln \frac{(J_0/J)_1}{(J_0/J)_0}$ müßte aber das Verhältnis der Schwächungskoeffizienten von der Nebeldichte unabhängig sein und dies würde also bedeuten, daß der einfache Exponentialansatz die Verhältnisse nicht genügend genau erfaßt, weil dabei die Schwächung, welche doch hauptsächlich durch Zerstreuung erfolgt, einer Absorption gleichgesetzt wird.

2. Nachprüfung des Exponentialansatzes für die Schwächung

Nach der Mieschen Theorie erfolgt die Streuung bei Teilchen, welche von ähnlicher Größe sind und einen ähnlichen Brechungsindex haben wie die Teilchen der hier untersuchten Nebel, zum größten Teil in Richtung des durchgehenden Strahles. Es wäre daher möglich, daß trotz der Abschwächung dieser Erscheinung durch wiederholte Zerstreuung das Streulicht in Richtung des Parallelstrahls ein ausgeprägtes Maximum hätte und daher in nennenswertem Maße mitgemessen würde. Eine solche Erscheinung könnte die beobachteten Abweichungen erklären. Es galt also zu prüfen, welche Vernachlässigung durch den Exponentialansatz begangen wurde. Eine solche Prüfung hätte durch Messungen bei verschiedenen Nebeldichten erfolgen können, wenn eine einwandfreie Bestimmung dieser Dichten möglich wäre. Da hierzu keine Möglichkeit bestand, wurde statt dessen die Schichtdicke verändert und Messungen bei gleicher Dichte über verschiedene Entfernungen vorgenommen.

Die Versuchseinrichtung war dabei folgende:

In Richtung der Monochromatorachse waren im Nebelraum hintereinander zwei Nernststifte aufgestellt und deren Licht

durch je eine Linse als Parallelstrahl auf die Linse vor dem Monochromatorspalt gerichtet. Hierbei war der dem Beobachter nähere Nernststift mit Linse auf einem kleinen Wagen angebracht und konnte von außen durch Schnurzug seitlich herausgefahren werden, sodaß dann die Strahlung des entfernteren Nernststiftes, welche vorher durch einen ebenfalls am Wagen angebrachten Schirm abgeblendet war, zur Messung gelangte. Mit einfachen Mitteln gelang es sicherzustellen, daß beim Wiedereinfahren Lichtquelle und Linse stets wieder genügend genau in die gleiche Stellung kamen. Die Stromaufnahme der Nernststifte wurde überwacht. Während einer Messung wurde die am Monochromator eingestellte Wellenlänge unverändert gelassen und die Schwächung über beide Entfernungen unmittelbar nacheinander gemessen, so daß die Nebeldichte c für zwei zusammengehörige Messungen als gleich angenommen werden konnte. Solche Messungen wurden in längeren Reihen mit verschiedenen Nebeldichten für drei Gebiete des untersuchten Spektrums ($\lambda = 0,65, 1,2, 2,4 \mu$) durchgeführt. Als Nebel diente Säurenebel, Salmiaknebel und Kalizuckerrauch. Es erwies sich als zweckmäßig für die Messungen, bei kurzen und bei langen Wellen nicht ungefähr gleiche Nebeldichte, sondern gleiche Schwächung anzustreben, da sonst bei erträglicher Schwächung im Sichtbaren die Schwächung im langwelligen Gebiet so gering ausfiel, daß hierbei bei der erreichbaren Meßgenauigkeit die Werte für die Schwächungskoeffizienten zu stark streuten.

Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Tabelle 1 aufgetragen.

Tabelle 1

λ_μ	0,65	1,20	2,40
gemessen	1,63		
d_1/d_2 aus d. Schwächung errechnet (Mittelw.)	1,60	1,61	1,61

Die Entfernung zwischen den Linsen betrug für den hinteren Nernststift 529,5 cm, für den vorderen 325,0 cm, so daß sich die Schichtdicken wie 1,63/1 verhielten. Die Werte stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit mit den geforderten überein; eine Abweichung vom Exponentialgesetz ist nicht festzustellen. Bei einem Parallelstrahl ist also bei den hier in Frage kommenden

großen Schichtdicken und geringen Nebeldichten das gestreute Licht so vollständig im Raum zerstreut, daß der Anteil, welcher in Richtung des durchgehenden Strahles fällt, vernachlässigt werden darf. Die vorerwähnten Unstimmigkeiten können also nicht auf einen Fehler im Ansatz zurückgeführt werden.

3. Prüfung einer etwaigen Häufung des Streulichtes in Richtung des durchgehenden Strahls

Beim Parallelstrahl darf bei den untersuchten Nebeldichten das etwa mitgemessene Streulicht vernachlässigt werden. Es war zu erwarten, daß bei einer punktförmigen Lichtquelle mit gleichmäßiger Ausbreitung der Strahlung nach allen Richtungen im Raum sich der Einfluß des gestreuten Lichtes stärker geltend machen würde. Fraglich war, ob dies zu einer allgemeinen Aufhellung oder zu einer Verwaschung und damit zu Unschärfe des Bildes führen würde.

Beobachtung und Messung (bei Verschiebung der Abbildung eines Nernststiftes über einen Spalt hinweg) ergaben jedoch, daß das Bild bis zum Verschwinden stets scharf blieb, sodaß die Wirkung des Nebels ähnlich ist der eines guten Trübglasses. Wegen der Verwandtschaft der Erscheinungen sei auf die Untersuchungen von Lax, Pirani und Schönborn¹⁾ verwiesen sowie auf eine Arbeit von Zschimmer.²⁾ Letztere enthält die bemerkenswerte Feststellung, daß bei gutem, weiß durchscheinenden Opalglas die Korngröße zwischen etwa $0,4-1,3 \mu$ liegt.

4. Farbumschlag

Bei einigen Versuchen mußte wegen der Verkürzung der Meßstrecke sehr dichter Nebel entwickelt werden. Hierbei wurde beobachtet, daß zu Beginn der Vernebelung der durchgehende Strahl ausgesprochen rötliche Färbung annahm. So erschien z. B. die hintere Linse in der Farbe der untergehenden Sonne. Mit der Zeit ging diese Färbung immer mehr zurück; die Linse erschien weiß, am Ende sogar leicht bläulich gefärbt. Diese Entwicklung ging im Verlauf von etwa $\frac{1}{2}$ Stunde vor sich.

Zur Klärung dieser Erscheinung wurde mit der Apparatur für die Messung der Schwächung des Parallelstrahles (§ 2, 7) ver-

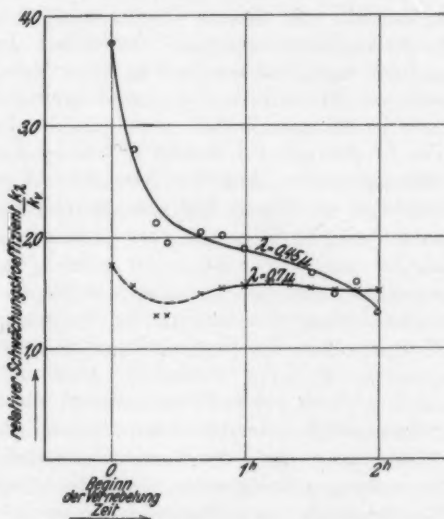
1) E. Lax, M. Pirani u. H. Schönborn, *Licht u. Lampe* **173**. S. 209. 1928.

2) E. Zschimmer, *Sprechsaal-Coburg* **63**. S. 347, 364. 1930.

sucht, diese auch zahlenmäßig zu erfassen. Hierzu wurde dichter Nebel (Säurenebel) entwickelt und nun über einen Zeitraum von etwa 2 Stunden hinweg die Schwächungskoeffizienten für zwei ausgewählte Spektralgebiete an den Enden des sichtbaren Spektrums gemessen. Der gemessene Verlauf der Schwächungskoeffizienten ist in Fig. 4 aufgetragen. Man sieht, wie die anfänglich großen Unterschiede der Schwächungskoeffizienten rasch zusammenschrumpfen und sich die Kurven am Ende sogar überschneiden.

Diese Erscheinungen: Farberscheinungen bei künstlichen Nebeln (farbiger Dampfstrahl) oder allgemeiner: Änderung von Durchsichtsbzw. Aufsichtsfarben in dispersen Systemen sind schon oft im Zusammenhang mit

Änderungen des Dispersitätsgrades, also der Teilchengröße, beobachtet worden. Eine umfassende Darstellung hierüber findet man bei Ostwald¹⁾, wo eine Fülle von Beobachtungsmaterial gesammelt und gesichtet ist. Leider handelt es sich dabei fast ausschließlich um subjektive Beobachtungen und diese erstrecken sich meistens nur auf einen Teil der Erscheinung, entweder die Aufsichtsfarbe (Streulicht) oder die Durchsichtsfarbe (Schwächung des direkten Strahles). Zahlenmäßige Untersuchungen über den Zusammenhang von Teilchengröße und Farberscheinungen,



Schwächung von kurz- und langwelligem sichtbarem Licht

Einfluß des Wachstums der Nebeltropfen

Fig. 4

1) W. Ostwald, Licht u. Farbe in Kolloiden.

welche im Zusammenhang mit einem weiteren Ausbau der Theorie für die Klärung der Vorgänge bei trüben Medien von Wert wären, fehlen.

In ähnlicher Weise wird auch im vorliegenden Fall der Farbumschlag mit Änderungen der Teilchengröße zusammenhängen. Die Nebel, welche diese Erscheinung zeigen, bestehen anfänglich aus kleinen Tröpfchen oder festen Teilchen einer hygroskopischen Substanz und ziehen daher Luftfeuchtigkeit an und vergrößern sich dadurch. Der Nebel entsteht also eigentlich erst durch diese Feuchtigkeitsaufnahme und die Wirkung der Nebelbildner besteht gerade in der Eigenschaft, schon bei Feuchtigkeitsgraden, welche an sich zur Nebelbildung nicht ausreichen würden, besonders wirksame Ansatzkerne für die Kondensation zu bilden. Mit zunehmender Feuchtigkeitsaufnahme, wachsender Tropfengröße verschiebt sich wegen des Zusammenhangs zwischen λ und d , auf welchen später noch näher eingegangen wird, das Maximum der Schwächung über das Spektrum hinweg. Zur Bestätigung der Annahme, daß hierbei die Wasseraufnahme wesentlich mitwirkt (man könnte ja auch an eine Auslese durch Sinken der größeren Teilchen denken), sei nochmals auf Ostwald¹⁾ verwiesen, wo der Farbumschlag bei Salmiaknebel geschildert und betont ist, das Schütteln mit Wasserzusatz die — hier in einem Gefäß vor sich gehende — Umwandlung beschleunigt. Auf den Zusammenhang zwischen Teilchengröße und Durchsichtsfarbe wird später noch eingegangen.

Hiermit waren also die im § 2,2 erwähnten Abweichungen aufgeklärt und diese konnten in Zukunft durch eine entsprechende Pause zwischen Vernebelung und Messung vermieden werden. Daß sie zu Beginn zu stark in Erscheinung traten, lag übrigens auch an der Art der Darstellung (vgl. § 2,7).

5. Teilchengröße

Von den Methoden zur Bestimmung der Teilchengröße ist die Ausmessung von Beugungsringen die bequemste. Bei diesen künstlichen Nebeln konnten aber Beugungsringe oder ähnliche regelmäßige Beugungserscheinungen nicht beobachtet werden. Außerdem darf nach der Arbeit von Mecke²⁾ als festgestellt

1) W. Ostwald, Licht und Farbe in Kolloiden, S. 437.

2) R. Mecke, Ann. d. Phys. 61. S. 471. 1920; 62. S. 623. 1920.

gelten, daß die normalen Beugungserscheinungen nur bei verhältnismäßig großen Tropfen (Minstdurchmesser bei Wasser: $5\ \mu$) auftreten. Bei noch kleineren Tropfendurchmessern treten anomale Erscheinungen auf, deren Zusammenhang mit der Tropfengröße bisher nur für reine Wassernebel bestimmt ist. Die Ermittlung dieses Zusammenhangs setzt aber gerade die Kenntnis der gesuchten Teilchengröße voraus. Zur Feststellung der Teilchengröße ist also dieser Weg nicht gangbar, wobei dahingestellt bleiben soll, ob nicht bei besonders günstigen Verhältnissen (dünne, definierte Schicht vor entfernter Lichtquelle; kurzwellige Strahlung) doch auch bei künstlichen Nebeln Beugungsringe zu finden sind.

Zur Prüfung der Teilchengröße wurde daher der Schwebekondensator herangezogen. Es ergaben sich dabei im Mittel für die verschiedenen Nebel Werte zwischen $1,2$ — $2,1\ \mu$ Durchmesser.

Diese Messungen sollten nur einen ungefähren Anhaltspunkt für die Teilchengröße geben. Sie werden am hiesigen Institut von anderer Seite fortgesetzt und genauer durchgeführt werden.

6. Spektralaufnahmen im Ultraviolett

Eine Ausdehnung der Untersuchung auf das ultraviolette Gebiet war nicht beabsichtigt. Da aber bei allen untersuchten Nebeln eine Wiederabnahme der Schwächung auch nach kürzeren Wellen zu festzustellen war, erschien es für die allgemeine Deutung der Erscheinungen doch wünschenswert, wenigstens einen ungefähren Anhalt über den Verlauf in diesem Gebiet zu gewinnen. Es wurde daher mit einem Quarzspektrographen das Spektrum einer Hg-Lampe im Bereich von etwa 580 bis $250\ m\mu$ in sämtlichen Nebeln bei verschiedener Dichte aufgenommen. Von einer Zunahme der Durchlässigkeit war auf diesen Aufnahmen nichts zu bemerken. Zur Gewinnung eines lückenlosen Spektrums, wenigstens in dem am Sichtbaren anschließenden Spektralgebiet, wurde dasselbe mit einem Nernststift wiederholt, und zwar mit dem gleichen Ergebnis. Da es sich nur um eine Stichprobe handeln sollte, wurde auf die Ausmessung der Aufnahmen verzichtet.

7. Erweiterung der Messungen am Parallelstrahl

Die Untersuchung von künstlichen Nebeln hatte mit Messungen der Schwächung eines Parallelstrahls begonnen. Zur

Pr \ddot{u} fung der Ergebnisse und zur Erweiterung durch Einbeziehung weiterer k \ddot{u} nstlicher Nebel wurden diese Messungen wiederholt. Was die Pr \ddot{u} fung betrifft, so kam es vor allem darauf an, den \ddot{u} berraschenden Wiederanstieg der Schw \ddot{a} chung oberhalb etwa $2,5\ \mu$ zu untersuchen. Es wurden daher Glaslinsen und Glasprisma durch solche aus Quarz ersetzt und alle Spiegel oberfl \ddot{a} chlich versilbert. Die Silberschicht wurde mit einer d \ddot{u} nnen Zaponlackhaut \ddot{u} berzogen und hielt den Angriffen der Nebel gut stand. Die bisherige Auffanglinse wurde durch einen Parabolspiegel (27 cm Durchmesser, 210 cm Brennweite) ersetzt, dessen \ddot{O} ffnungsverh \ddot{a} ltnis dem des Monochromators entsprach. Dementsprechend wurde die Aufstellung der Me \ddot{B} appar \ddot{a} tur ge \ddot{a} ndert (vgl. Fig. 1).

Um auch noch die letzte Glasschicht im Strahlengang (Kolben der Punktlichtlampe) auszumerzen, wurde versucht, diese Lampe durch einen Nernststift (200 Volt, 1 Amp.) zu ersetzen. Die Intensit \ddot{a} t nahm aber dabei im Sichtbaren so stark ab, da \ddot{B} der geringe Gewinn im Ultraroten daf \ddot{u} r keinen Ersatz bot. Jede Einbu \ddot{B} e im Sichtbaren wirkt bei der starken Schw \ddot{a} chung durch Nebel gerade in diesem Gebiet besonders ung \ddot{u} nstig. Eine weitere \dd{A} nderung bestand darin, da \ddot{B} , um auch bei starker Schw \ddot{a} chung im langwelligen Gebiet noch gen \ddot{u} gende Intensit \ddot{a} t der Vergleichswellenl \ddot{a} nge zu erhalten, die Strahlung hierf \ddot{u} r nicht mehr dem Strahlengang des Monochromators entnommen, sondern direkt durch eine eigene Linse auf Filter und zweites Thermoelement gerichtet wurde.

Mit dieser Anordnung wurden nun folgende Nebel untersucht:

S \ddot{a} urenebel,
Nebel aus SiCl_4 und NH_3 ,
Nebel aus TiCl_4 ,
Chlorzinknebel,
Schwarznebel,
Schwarznebel mit S \ddot{a} urenebel vermischt.

An dieser Stelle seien einige Bemerkungen \ddot{u} ber das Arbeiten mit diesen Nebeln eingef \ddot{u} gt:

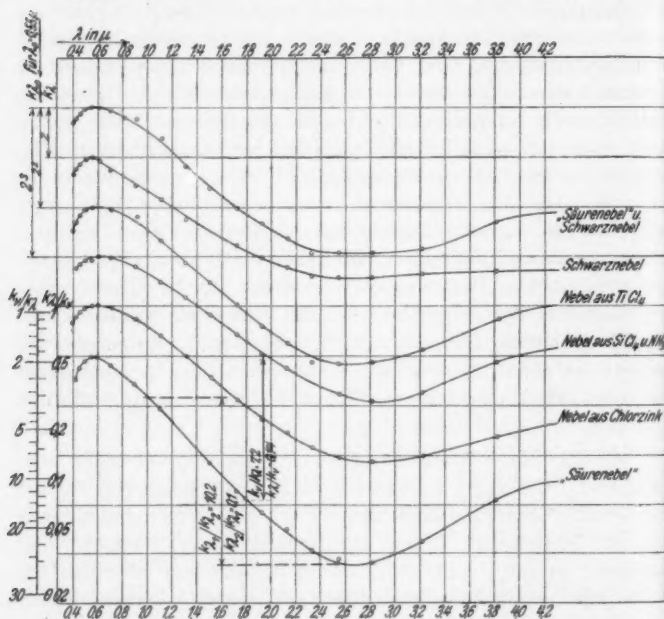
Die Fl \ddot{u} ssigkeiten: Nebels \ddot{a} ure, SiCl_4 und Ammoniak und TiCl_4 wurden mittels Druckgas oder Druckluft (Luftpumpe) zerst \ddot{a} ubt. Allgemein entstanden Schwierigkeiten dadurch, da \ddot{B} f \ddot{u} r jede Vernebelung nur ganz geringe Mengen des Nebelstoffes

erforderlich waren, dagegen öftere Nebelentwicklung ohne Betreten des Nebelraums erwünscht war. Am bequemsten war das Arbeiten mit dem Säurenebel, wenn auch der starke Angriff der Nebelsäure häufigen Ersatz der verwendeten Korken und Schläuche erforderte. SiCl_4 und Ammoniak wurden so zerstäubt, daß sich die Sprühkegel gegenseitig durchdrangen. Es entstand so ein außerordentlich dichter Nebel. Jedoch waren die Geräte nach kurzem Stehen stets vollkommen verstopft. Noch lästiger zeigte sich diese Erscheinung bei TiCl_4 , welches außerordentlich hygroskopisch ist und mit der geringsten Feuchtigkeit gelbe Krusten bildet, so daß der Zerstäuber sofort verstopft wurde. Jedoch genügte zur Vernebelung einfaches Verspritzen vollkommen. Der Chlorzinknebel, eine graue, ziemlich flüssige Paste, wurde durch ein Zündgemisch von 70 Teilen Kaliumpermanganat und 30 Teilen Eisenpulver oder einfacher durch Bunsenbrenner in Brand gesetzt. Auf die gleiche Weise wurde der Schwarznebel entzündet, welcher aus einer grauen Paste (nach Angaben des Herstellers SiCl_4 enthaltend) und einer organischen Substanz (Naphthalin?) besteht. Der grauschwarze Nebel ist mit Rußteilchen durchmengt, welche nach und nach ausfallen.

Die Räume wurden durch den Schwarznebel stark verschmutzt. Im übrigen waren außer dem Ausbleichen von Farben und der Korrosion aller nicht durch starkes Einfetten geschützten blanken Metallteile keine nachteiligen Einwirkungen festzustellen. In den Beobachtungsraum, welcher nur behelfsmäßig gegen den Nebelraum abgedichtet war, traten öfters beträchtliche Nebelmengen über. Gesundheitliche Nachteile entstanden hieraus nicht. Bei schwächerem Nebel konnten auch die vernebelten Räume für einige Zeit betreten werden. Eine Ausnahme bildet der Chlorzinknebel, dessen Übertritt daher durch Einbau eines zweiten Ventilators, welcher im Beobachtungsraum leichten Überdruck erzeugte, verhindert wurde.

Zu den Messungen selbst ist zu bemerken: Jeder Nebel wurde bei verschiedenen Dichten untersucht. Die in Fig. 5 eingetragenen Werte sind Mittelwerte. Bei Streuung der Werte wurden im Sichtbaren die bei schwachem Nebel, im Ultraroten die bei dichtem Nebel gemessenen Werte stärker bewertet. Messung und Auswertung erfolgten im übrigen wie früher beschrieben. Abweichend davon ist jedoch das Verhältnis des

Schwächungskoeffizienten in logarithmischem Maßstab aufgetragen. Hierdurch wird die Verzerrung, welche vorher als Folge der Verhältnissbildung auftrat, beseitigt. Der Kurvenverlauf ist damit von der gewählten Vergleichswellenlänge unabhängig und die Kurve kann, wie sonst z. B. Kurven von Ab-



Schwächungskoeffizienten einiger künstlicher Nebel

Fig. 5

sorptionskoeffizienten, gelesen werden, wobei nur der absolute Maßstab unbestimmt bleibt. Dies ermöglicht nunmehr, auch als Vergleichswellenlänge die Wellenlänge $0,55 \mu$ zu wählen, für welche das Auge (bei mittleren Helligkeiten) am empfindlichsten ist.

Bei sämtlichen untersuchten Nebeln liegt das Maximum der Schwächung im untersuchten Bereich in diesem Spektralgebiet, so daß hier jede der Kurven die entsprechende Ordinate berührt. Um das Verhältnis des Schwächungskoeffizienten für eine beliebige Wellenlänge zu dem Koeffizienten für die Ver-

gleichswellenlänge ($\lambda = 0,55 \mu$) zu erhalten, braucht man daher nur den Abstand abzugreifen, welchen die Kurve an der betreffenden Stelle von dieser Ordinate hat. An dem beigegebenen logarithmischen Maßstab kann dann das Verhältnis k_0/k_2 sofort abgelesen werden. Diese gibt also an, um wievielfach der Schwächungskoeffizient für das sichtbare Gebiet größer ist als für die betreffende Wellenlänge. Die reziproken Werte k_2/k_0 sind ebenfalls angegeben, da diese für das später folgende Nomogramm gebraucht werden. In gleicher Weise kann man auch das Verhältnis des Schwächungskoeffizienten für zwei beliebige Spektralgebiete feststellen, indem man den senkrechten Abstand der entsprechenden Punkte der Kurve abgreift. Am Maßstab liest man dann das Verhältnis $k_{\lambda_1}/k_{\lambda_2}$ ab (statt k_0/k_2), bzw. $k_{\lambda_2}/k_{\lambda_1}$, wenn $k_{\lambda_1} > k_{\lambda_2}$. Beispiele hierfür sind in Fig. 5 bei der Kurve des Säurenebels eingetragen.

Die Kurven selbst zeigen bei allen untersuchten Nebeln einen zunächst überraschend ähnlichen Verlauf. Größere Abweichungen zeigen sich, wie zu erwarten, beim Schwarznebel, welcher ja auch kaum mehr als „Nebel“ angesprochen werden kann. Der Wiederanstieg der Schwächung bei etwa $2,5-3,0 \mu$ prägt sich bei allen Nebeln deutlich aus.

§ 3. Vergleich der Ergebnisse mit der Theorie

Es ist üblich, bei makroskopischen Objekten den an sich einheitlichen Vorgang der Störung einer elektromagnetischen Welle durch ein in den Strahlengang fallendes Objekt in Spiegelung und Brechung einerseits und Beugung andererseits zu zerlegen und getrennt zu betrachten und man hat daher zunächst diese Betrachtungsweise auch für mikroskopische Teilchen übernommen. Sind die Teilchen sehr klein gegenüber der Wellenlänge der auffallenden Strahlung, so genügt, wie Rayleigh gezeigt hat, Berücksichtigung der Beugung allein und man erhält

die Beziehung $J = J_0 \cdot e^{-\frac{c d^2}{\lambda^4}}$ für die Abhängigkeit der Schwächung von Teilchengröße (d = Teilchendurchmesser) und der Wellenlänge λ der Strahlung. Sind andererseits die Teilchen groß gegenüber der Wellenlänge, so kann der Anteil der Beugung vernachlässigt und der Einfluß auf die Strahlung als Spiegelung bzw. Brechung angenommen und berechnet werden. Eine solche

Berechnung hat z. B. Wiener¹⁾ vorgenommen. Derartige Betrachtungen führen in den beiden Extremfällen zu guten Näherungen. Außerdem kann es in einzelnen Fällen nützlich sein, auch den Anteil der Interferenz an dem Vorgang am Einzelteilchen zu berücksichtigen (Mecke²⁾); da es sich praktisch fast immer nicht um die Betrachtung der von einem einzelnen Teilchen, sondern der von einer Vielzahl von Teilchen ausgehenden Wirkung handelt, ist auch eine gegenseitige Beeinflussung der Vorgänge am benachbarten Teilchen möglich (Pokrowski³⁾). In der Regel wird es allerdings zulässig sein, den Einzelvorgang für sich zu betrachten. Bei der Betrachtung der Gesamterscheinung dagegen kann allerdings die Wiederholung dieses Vorgangs an einem anderen Teilchen nicht außer acht gelassen werden. Endlich ist es möglich, die Gesamtheit der Teilchen samt dem sie umgebenden Medium als ein einheitliches, optisch inhomogenes Medium zu betrachten (Pokrowski⁴⁾).

Alle diese Betrachtungsweisen führen nur in besonderen Fällen zum Ziel. Sie sind nicht mehr anwendbar, wenn, wie bei dem vorliegenden Problem, Nebelteilchen und Wellenlänge der Strahlung von der gleichen Größenordnung sind. Nun hat Mie in seiner grundlegenden Arbeit⁵⁾ versucht, den Vorgang der Störung einer Lichtwelle durch ein (kugelförmiges) Teilchen als Ganzes zu erfassen und eine exakte Berechnung der Zerstreuung und Absorption auf Grund der elektromagnetischen Lichttheorie durchzuführen. Diese Berechnungen gelten für jede Teilchengröße bzw. Wellenlänge, also auch für den vorliegenden Fall. Gerade bei größeren Teilchen sind die Bedenken sicher hinfällig, welche gegen die Mieschen Rechnungen wegen der Übertragung der aus makroskopischen Untersuchungen gewonnenen Materialkonstanten auf mikroskopische Teilchen erhoben wurden. Trotzdem lag die unmittelbare Bedeutung dieser Arbeit aber auf anderem Gebiet; denn der Anwendung seiner Formeln auf Verhältnisse von Teilchendurchmesser/Wellenlänge, wie sie hier vorliegen, stehen erhebliche rechnerische Schwierigkeiten entgegen. Als Folge davon beschränken sich auch die zahlreichen experi-

1) Chr. Wiener, Nova Acta Halle **73**. S. 1. 1900; **91**. S. 1. 1909.

2) R. Mecke, Ann. d. Phys. **61**. S. 471. 1920; **62**. S. 623. 1920.

3) G. I. Pokrowski, Ztschr. d. Phys. **53**. S. 67. 1929.

4) G. I. Pokrowski, Ztschr. d. Phys. **31**. S. 14, 514. 1925.

5) G. Mie, Ann. d. Phys. **25**. S. 377. 1908.

mentellen Untersuchungen, welche zur Prüfung der Mieschen Theorie unternommen wurden, stets auf Fälle, in welchen das Verhältnis d/λ noch als klein betrachtet werden kann.

Bei den Versuchen darüber hinaus in das bei dem vorliegenden Problem in Frage kommende Gebiet (Teilchengröße von der Größenordnung der Wellenlänge) vorzudringen, lassen sich zwei Richtungen unterscheiden. Die erste benutzt die Mieschen Formeln und versucht die Rechnung durch rechnerische Hilfsmittel zu erleichtern. Die andere versucht durch Umformung der Mieschen Ansätze zu leichter berechenbaren Ausdrücken zu gelangen. Als Vertreter der ersten Richtung ist Blumer zu nennen, welcher zahlreiche Berechnungen und Diagramme über die Zerstreuung von sichtbarem Licht nach den Formeln von Mie an verhältnismäßig groben Teilchen ($d = 0,5 - 1,0 \mu$) veröffentlicht hat^{1), 2), 3)}. Er kommt bei diesen Untersuchungen mit seinen Annahmen den hier vorliegenden Verhältnissen am nächsten. Es sei daher vor allem auf die Arbeit über Farbenzerstreuung an kleinen Kugeln³⁾ verwiesen. Beim Vergleich mit dem experimentellen Befund braucht hier nur das gesamte Streulicht pro Teilchen in Betracht gezogen werden, da der Polarisationsgrad hier nicht interessiert und die Richtungsverteilung beim Einzeltvorgang, wie bereits ausgeführt, infolge der wiederholten Zerstreuung nicht erhalten bleibt.

Da Blumer seine Rechnungen bis zu Tropfengrößen von $1,0 \mu$ Durchmesser hinauf durchgeführt hat und die Teilchen der hier untersuchten Nebel von der gleichen Größenordnung sind (vgl. § 2,5), wurde untersucht, welche Schwächungskoeffizienten sich nach Blumer ergeben würden. Da es nur auf die Größe $\frac{2q\pi}{\lambda}$ ankommt, wobei also $2q$ der Teilchendurchmesser, können die Ergebnisse statt auf eine Wellenlänge und verschiedene Teilchendurchmesser auch auf eine Teilchengröße und verschiedene Wellenlängen bezogen werden. Die Ergebnisse der erwähnten Arbeit von Blumer wurden auf diese Weise umgerechnet und zwar für $2q = 0,5 \mu$. Man erhält dabei Werte für den Bereich von $\lambda = 0,26 - 6,5 \mu$. Diese stimmen mit

1) H. Blumer, Ztschr. f. Phys. 32. S. 119. 1925; 38. S. 304. 1926.

2) H. Blumer, Ztschr. f. Phys. 38. S. 920. 1926 (enthält ausführliche Literaturangaben).

3) H. Blumer, Ztschr. f. Phys. 39. S. 195. 1926.

unseren Versuchsergebnissen durchaus nicht \ddot{u} berein. Z. B. ergibt sich das Verh \ddot{a} ltnis der Schw \ddot{a} chungskoeffizienten f \ddot{u} r $\lambda_1 = 0,3 \mu$ und $\lambda_2 = 3,0 \mu$ danach zu rund $10^5/1$! W \ddot{a} hlt man $d = 3,0 \mu$, so erh \ddot{a} lt man nur noch einige Werte, welche einigerma \ddot{a} Ben in das untersuchte Spektralgebiet fallen, z. B. $\lambda_1 = 1,56 \mu$ und $\lambda_2 = 3,9 \mu$ und f \ddot{u} r diese das Verh \ddot{a} ltnis $\frac{k_1}{k_2} = \frac{11,9}{1}$.

Eine Aussage dar \ddot{u} ber, ob dieser Widerspruch auf Vernachl \ddot{a} ssigungen der Theorie oder der Rechnung (Ber \ddot{u} cksichtigung nur einer endlichen Anzahl von Gliedern der Reihe) zur \ddot{u} ckzuf \ddot{u} hren ist oder darauf, da \ddot{B} die Annahmen z. B. \ddot{u} ber gleiche Gr \ddot{o} Be aller Teilchen oder der angenommene Brechungsindex $n = 1,25$ bei diesen Nebeln nicht gen \ddot{u} gend erf \ddot{u} llt sind, ist nach dem heutigen Stand der Theorie und bei so geringem experimentellen Material nicht m \ddot{o} glich. Auf eine Folgerung aus den Blumerschen Rechnungen sei jedoch noch hingewiesen. Aus der Tabelle in der erw \ddot{a} hnten Arbeit¹⁾ \ddot{u} ber das Verh \ddot{a} ltnis der Zerstreuung f \ddot{u} r Rot, $\lambda = 0,65 \mu$ zu Gr \ddot{u} n, $\lambda = 0,52 \mu$ geht hervor, da \ddot{B} dieses Verh \ddot{a} ltnis bei Ver \ddot{a} nderung der Teilchengr \ddot{o} Be Schwankungen unterliegt. Da dort in der Tabelle nur die Zerstreuung in Richtung des durchgehenden Strahles ber \ddot{u} cksichtigt ist, seien hier die Ergebnisse bei Ber \ddot{u} cksichtigung des gesamten Streulichtes eingef \ddot{u} gt. Im folgenden wird darauf Bezug genommen werden.

Tabelle 2

d in $m\mu$	Rot/Gr \ddot{u} n	Gr \ddot{u} n/Rot	d in $m\mu$	Rot/Gr \ddot{u} n	Gr \ddot{u} n/Rot
50	0,430	2,27	500	0,698	1,43
100	0,401	2,50	1000	0,461	2,19
200	0,564	1,77			

Gr \ddot{u} n: $\lambda = 520 m\mu$,

Rot: $\lambda = 650 m\mu$.

Die andere Richtung wurde von Debye²⁾ und Jobst³⁾ verfolgt. Zun \ddot{a} chst kommt vor allen Dingen die Arbeit des letzteren in Betracht. Er gewinnt durch Umformung der Mie-schen Formeln die M \ddot{o} glichkeit, das gesamte gestreute bzw.

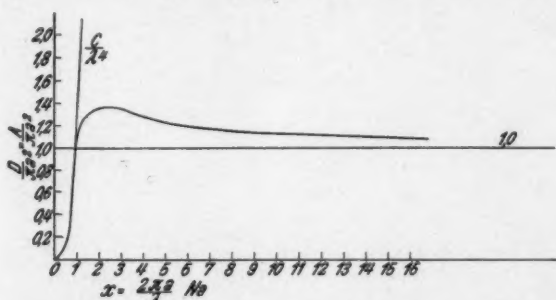
1) H. Blumer, Ztschr. f. Phys. **39**. S. 195. 1926.

2) P. Debye, Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material. Diss. M \ddot{u} nchen 1909. Auszug: Ann. d. Phys. **30**. S. 57. 1909.

3) G. Jobst, Ann. d. Phys. **76**. S. 863. 1925.

absorbierte Licht für beliebige Verhältnisse von Teilchendurchmesser und Wellenlänge (bis zum Schattenfall) zu berechnen. Leider führt er diese Rechnung nur für vollkommen oder nahezu vollkommen leitende Teilchen durch. Diese Beschränkung ist keine zufällige; denn die elektromagnetischen Eigenschaften der Teilchen bestimmen die Zulässigkeit der für die Berechnung notwendigen Vereinfachungen und Vernachlässigungen.

Eine Aussage über den zahlenmäßigen Verlauf von Streuung und Absorption bei nicht leitenden Teilchen ist also leider heute noch unmöglich. Es fragt sich, ob wenigstens ein qualitativer Vergleich mit den für vollkommen leitenden Teilchen durch-



Bezogene Absorption und Strahlung einer vollkommen reflektierenden Kugel nach Jobst

Fig. 6

geführten Rechnungen statthaft ist. Mit dem Vorbehalt, daß es sich nur um einen Versuch handeln kann, dessen Berechtigung sich erst noch erweisen muß, soll ein solcher Vergleich unter-
nommen werden.

Fig. 6 ist der Arbeit von Jobst entnommen und zeigt den Verlauf des Streulichtes für vollkommen leitende Teilchen in Abhängigkeit von Teilchengröße und Wellenlänge. Der Ordina-
tenmaßstab ist dabei so gewählt, daß $D = 1$ dem Schattenfall entspricht. Die Kurve gibt also an, um wieviel größer bzw. kleiner die Schwächung einer Strahlung ist als sie sich bei einfacher Zugrundelegung des schwächenden Querschnittes ergeben würde. Bei gleichbleibender Tropfengröße steigt also die Schwächung mit abnehmender Wellenlänge sehr steil an, verflacht sich aber rasch und erreicht ein Maximum, welches nicht

erheblich \ddot{u} ber der im Schattenfall zu erwartenden Schw \ddot{a} chung liegt. Es folgt ein schwacher Abfall und asymptotische Ann \ddot{a} herung an die Ordinate $D = 1$.

Mit dieser Kurve k \ddot{o} nnen (unter dem erw \ddot{a} hnten Vorbehalt!) die Kurven der Fig. 5 \ddot{u} ber das Verh \ddot{a} ltnis der Schw \ddot{a} chungskoeffizienten leicht verglichen werden. Wie bereits bemerkt, k \ddot{o} nnen diese Kurven ja auch als die der absoluten spezifischen Schw \ddot{a} chungskoeffizienten f \ddot{u} r den betreffenden Nebel gedeutet werden und zwar f \ddot{u} r eine beliebige Nebeleinheit, also auch f \ddot{u} r ein Teilchen. Es \ddot{a} ndert sich dabei nur der Ma \ddot{s} stab. Als Abszissen sind allerdings die Wellenl \ddot{a} ngen aufgetragen statt dem Verh \ddot{a} ltnis $x = \frac{2\pi a}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}$, da die Teilchengr \ddot{o} Be als konstant betrachtet wird. Man \ddot{u} bersieht aber leicht, da β dies nur eine Verzerrung des Abszissenma \ddot{s} stabes bewirkt, indem mit wachsendem λ die Me \ddot{s} tellen n \ddot{a} her zusammenr \ddot{u} cken, der Kurvenverlauf also steiler wird. Beachtet man dies beim Vergleich, so ist die \ddot{A} hnlichkeit zwischen diesen Kurven und der theoretischen unverkennbar. S \ddot{a} mtliche untersuchten Nebel zeigen die fast gleichm \ddot{a} Big \ddot{u} e Schw \ddot{a} chung im Sichtbaren mit schwachem Abfall nach k \ddot{u} rzeren und steilem Abfall nach l \ddot{a} nger \ddot{u} n Wellen. Im Sichtbaren ist allerdings das gleichartige Verhalten der Nebel in gewissem Grade selbstverst \ddot{a} ndlich, da ja als „Nebel“, allgemein also: als (wei β e) „Tr \ddot{u} bungen“ gerade solche Zust \ddot{a} nde erscheinen, bei denen das Streulicht im Sichtbaren stark und ann \ddot{a} hernd frequenzunabh \ddot{a} ngig ist. Die \ddot{A} hnlichkeit des Verhaltens auch im Ultraroten erlaubt aber doch daraus zu schlie β en, da β es sich hier um mehr als um zuf \ddot{a} llig gleiche Wirkung aus ganz verschiedenen Ursachen handelt.

Legt man einen Verlauf wie den theoretisch etwa zu erwartenden zugrunde, so steht auch die Erscheinung des Farbumschlages im Einklang mit der Theorie. Denn eine Vergr \ddot{o} Berung der Teilchen m \ddot{u} Bte eben die \ddot{A} nderungen in der spektralen Schw \ddot{a} chung mit sich bringen, welche sich bei den Versuchen ergeben haben.

F \ddot{u} r die Wied \ddot{e} rzunahme der Schw \ddot{a} chung bei langen Wellen ergibt sich vielleicht aus der Tabelle im letzten Abschnitt eine Deutungsm \ddot{o} glichkeit. Nimmt man n \ddot{a} mlich f \ddot{u} r die Kurve auch bei nicht leitenden Teilchen einen \ddot{a} hnlichen Verlauf wie im Diagramm von Jobst (Fig. 6) also geradlinigen Anstieg, flaches

Maximum und langsamen Abfall mit wachsendem x an, so müßte für das Verhältnis $\frac{\alpha_{d1}(\text{Rot})}{\alpha_{d2}(\text{Grün})}$ jeweils gelten

$$\frac{\alpha_{d1}}{\alpha_{d2}} = c_1 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)_{d=\text{const}} = c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)_{d=\text{const}}.$$

Das bedeutet also, daß das Verhältnis Rot/Grün mit wachsendem x , d. h. wachsendem d nach anfänglicher Konstanz bis auf 1 abnehmen (Maximum der Kurve) und sich hierauf umkehren würde, um sich schließlich wieder 1 zu nähern. Im Gegensatz hierzu ergeben sich für dieses Verhältnis aus der Tabelle Schwankungen. Andeutungen, wonach ein solches Verhalten bei dielektrischen Teilchen zu erwarten sei, finden sich schon bei Mie. Weiterhin sei auf die Arbeit von Debye¹⁾ verwiesen, dessen Rechnungen diese Erwartung bestätigen. Die für das Verhältnis von Lichtdruck zu Anziehungskraft gezeichneten Kurven können allerdings auch nach Ausscheidung der Anziehungskraft nicht ohne weiteres als Maß für den Betrag zerstreuter Strahlung gelten, da der Lichtdruck nicht nur vom Absolutbetrag abgelenkter Strahlung, sondern auch von der Richtung der Ablenkung abhängig ist. Diese wird aber kaum derartigen Schwankungen unterliegen, daß allein hierdurch das Auftreten mehrerer Maxima erklärlich wird.

Zusammenfassend sei bemerkt, daß es sich heute nur darum handeln kann auf mögliche Zusammenhänge zwischen unseren Versuchsergebnissen und den erwähnten theoretischen Arbeiten hinzuweisen. Ein weiterer Ausbau dieser Theorien und Prüfung durch eigens darauf zugeschnittene Versuche wäre wünschenswert. Erst dann kann die Berechtigung dieser Deutungen entschieden werden.

§ 4. Einfluß der Veränderung einer Strahlung durch Nebel auf die Sicht

Es entsteht nunmehr die Frage, wie die bisher besprochenen Veränderungen, welche die Strahlung beim Durchgang durch Nebel erleidet, die Sicht beeinflussen. Unter Sicht soll hierbei die Erkennungsmöglichkeit eines Objektes verstanden sein, welche bewirkt wird durch seine Eigenstrahlung oder durch Änderung (Reflexion, Absorption) fremder Strahlung. Die Strahlung (elektromagnetische Strahlung des untersuchten Spektral-

1) P. Debye, Diss. München 1909; Ann. d. Phys. 30. S. 57. 1909.

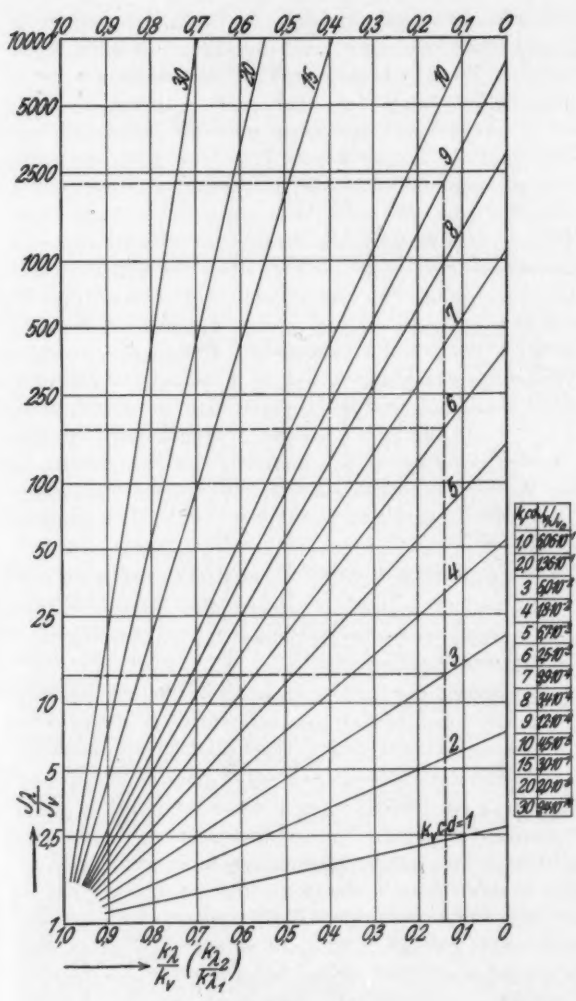
gebiets, also etwa $0,4\text{--}4,0\ \mu$) soll dabei ohne Rücksicht auf die Augenempfindlichkeit allgemein als Licht bezeichnet werden.

1. Abnahme der direkten (unveränderten) Strahlung

Bisher wurde festgestellt, daß eine solche Strahlung eine frequenzabhängige Schwächung erleidet, wobei es bei den Messungen zur Ermittlung der Schwächungskoeffizienten möglich war, von der Frage abzusehen, wie diese Schwächung zustande kommt und sie wie reine Absorption zu behandeln. Aus den dabei ermittelten relativen spektralen Schwächungskoeffizienten läßt sich allgemein die Schwächung des direkten unzerstreuten Lichtes für jeden Fall berechnen. Zur Erleichterung dieser Rechnung und zur besseren Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen dem Verhältnis der Schwächungskoeffizienten, der Nebeldichte bzw. Schichtdicke und der relativen Durchlässigkeit für Strahlung verschiedener Spektralgebiete dient Fig. 7. Als Abszisse ist dabei das jeweilige Verhältnis der Schwächungskoeffizienten aufgetragen. Die Ordinaten ergeben dann das Verhältnis der durchgelassenen Strahlungen. Die Fahrstrahlen entsprechen den Werten des Schwächungskoeffizienten ($k_e c d$) für die Wellenlänge $0,555\ \mu$ und damit verschiedenen Werten des Produktes $c d$ im eingetragenen Verhältnis. Sie können also sowohl als Änderungen der Nebeldichte bei konstanter Schichtdicke oder als Änderungen der Schichtdicke bei konstanter Nebeldichte gelesen werden.

Dies läßt sich am einfachsten an einem Beispiel klar machen: Gegeben sei z. B. ein Säurenebel, durch welchen eine Strahlung der Wellenlänge $\lambda = 0,55\ \mu$ in der Entfernung $l = 1$ auf 5 Proz. geschwächt wird. Hiermit ist die Dichte des Nebels bestimmt, denn nach der Formel $J = J_0 e^{-k_e c d}$ ergibt sich für $J/J_0 = 5$ Proz. $k_e c d = 3$, wie auch sofort aus der Tabelle des Nomogramms entnommen werden kann. Da die Entfernung l zu 1 angenommen wurde, hat also der Nebel die relative Dichte 3. Es soll nun festgestellt werden, welcher Gewinn durch Verwendung von Strahlung der Wellenlänge $1,8\ \mu$ entsteht. In Fig. 5 wird für diese Wellenlänge der Wert $k_1/k_e = 0,14$ im Maßstab abgegriffen. Im Nomogramm ergibt dann der Schnittpunkt der Abszisse 0,14 mit dem Fahrstrahl $k_e c d = 3$, $J_1/J_e = 13,3$. Nach Durchgang durch diese Nebelstrecke der Länge l und der relativen Dichte 3 stehen also ursprünglich gleiche Strahlungsmengen der Wellen-

länge
der S



Nomogramm
Fig. 7

längen $\lambda = 0,55 \mu$ bzw. $\lambda = 1,8 \mu$ im Verhältnis 1:13,3. Von der Strahlung mit der Wellenlänge $\lambda = 1,8 \mu$ dringen also 13 mal

soviel durch und zwar absolut: 65 Proz. der ursprünglichen Strahlung. Will man nun z. B. die entsprechenden Werte für die Nebelstrecke 2 wissen, so erhält man sie in gleicher Weise aus dem Schnittpunkt der Abszisse 0,14 mit dem Fahrstrahl $k_0 c d = 6$. Ändert sich außerdem noch die Dichte, indem z. B. die ursprüngliche Dichte um 50 Proz. zunimmt, so sucht man statt dessen den Schnittpunkt mit dem Fahrstrahl $k_0 c d = 9$. Es kann also sofort für jede Entfernung (Schichtdicke) und jede Nebeldichte (gekennzeichnet durch die Schwächung der Vergleichswellenlänge) sowohl das Verhältnis der beiden Strahlungen als auch die absolute Schwächung der Strahlung mit der Wellenlänge $0,55 \mu$ entnommen und damit der gleiche Wert für die zweite Wellenlänge sofort angegeben werden. Es können auch zwei beliebige Strahlungen der Wellenlängen λ_1 und λ_2 miteinander verglichen werden, indem man in Fig. 5 den Wert $k_{\lambda_2}/k_{\lambda_1}$ ($\lambda_2 > \lambda_1$) abgreift und im Nomogramm von der entsprechenden Abszisse $k_{\lambda_2}/k_{\lambda_1}$ ausgeht. Zur Berechnung der absoluten Werte der durchgelassenen Energien muß dann noch eine der beiden Strahlungen auf die Vergleichswellenlänge bezogen werden.

Für die praktische Beurteilung kommt es auf zwei Fragen an:

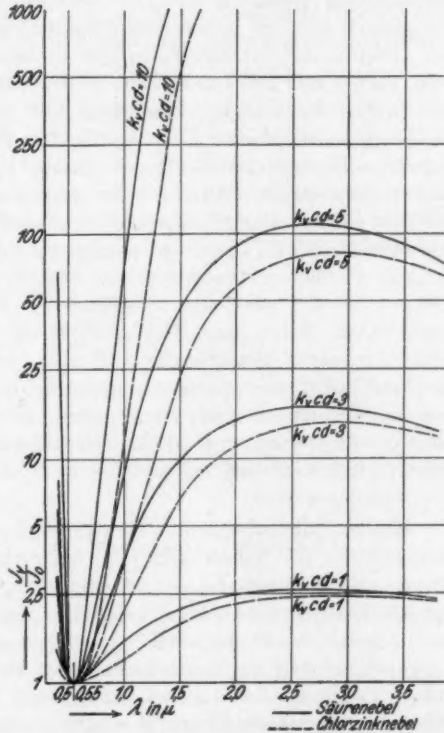
1. Wie verhalten sich die ursprünglich gleiche Strahlungsmengen verschiedener Spektralgebiete nach Durchgang durch eine bestimmte Nebelschicht?

2. Nach welcher Entfernung sind ursprünglich gleiche Strahlungsmengen verschiedener Spektralgebiete in einem Nebel mit bestimmter Dichte auf den gleichen Betrag abgesunken?

Zur Beurteilung der ersteren Frage dient zunächst die Fig. 7. Anschaulicher ist die Fig. 8, in welcher Ablesungen aus diesem Nomogramm für einige Fälle aufgetragen sind. Es zeigt die Verhältnisse der durchgelassenen Strahlungsmengen in Abhängigkeit von der Wellenlänge für zwei bestimmte Nebel (Säurenebel und Chlorzinknebel) aufgetragen in logarithmischem Maßstab. Die Kurven 1, 3, 5, 10 entsprechen dabei wiederum entsprechenden Verhältnissen der Produkte $c d$, also Nebeldichten bzw. Schichtdicken. Man sieht, wie sich das Schwergewicht der Strahlung bei starken Trübungen also außerordentlich stark nach einem bestimmten Spektralgebiet verschiebt und die Verwendung ultraroter Strahlung im Nebel erscheint danach sehr vorteilhaft. Geht man z. B. von einer Strahlung

der Wellenlänge $0,55 \mu$ zu einer anderen mit der Wellenlänge $1,65 \mu$ über, so dringt durch eine Nebelschicht (Chlorzinknebel), welche einem Wert von $k_0 c d = 10$ entspricht, welche also entweder so stark oder so dicht ist, daß sie sichtbare Strahlung auf $4,5 \cdot 10^{-5}$ des Ausgangswertes schwächt, 10^3 mal soviel Strahlung der Wellenlänge $1,6 \mu$, also immer noch 4,5 Proz. der ursprünglichen Strahlung hindurch. Geht man von einer halb so starken bzw. dichten Schicht aus, so fällt der Vergleich für die ultrarote Strahlung allerdings wesentlich ungünstiger aus. Es verhalten sich dann die Strahlungen wie 1:35 statt wie 1:1000 (vgl. Fig. 8); dabei werden im Sichtbaren 6,7 Proz., im Ultraroten ($1,65 \mu$) 23,4 Proz. durchgelassen. In einem

späteren Abschnitt wird aber gezeigt werden, daß die Erkennbarkeit einer Lichtquelle im Nebel von dem Verhältnis des direkten Lichtes zum Streulicht abhängt und daß dieses erst bei einer Schwächung des direkten Lichtes auf 10^{-5} des Ausgangswertes einen für die Erkennbarkeit nicht mehr ge-



Verhältnis ursprünglich gleicher Strahlungsenergien nach Durchgang durch verschiedene Nebelschichten

Fig. 8

n \ddot{u} genden Wert erreicht. Beim Vergleich ist also die Annahme einer recht dicken bzw. dichten Nebelschicht berechtigt.

Die Antwort auf die zweite Frage ist einfach: F \ddot{u} r gleiche Schw \ddot{a} chung verhalten sich die Entfernungen (Schichtdicken) umgekehrt wie die Schw \ddot{a} chungskoeffizienten. W \ddot{a} hrend also der Gewinn im ersteren Falle mit zunehmender Schichtdicke bzw. Dichte sehr stark anw \ddot{a} chst, ist der Entfernungsgewinn von der Dichte unabh \ddot{a} ngig. Er bewegt sich bei den untersuchten Nebeln zwischen der 5—18fachen Entfernung. Setzt man n \ddot{a} mlich die Sichtweite im Sichtbaren gleich 1, so betr \ddot{a} gt die maximale Sichtweite im Ultraroten f \ddot{u} r S \ddot{a} urenebel etwa 18, f \ddot{u} r die \ddot{u} brigen in der Figur aufgef \ddot{u} hrten Nebel etwa 7,5—8,5 f \ddot{u} r Schwarznebel 5,5. Die Abweichung des Schwarznebels bei im Grunde \ddot{a} hnlichem Gesamtverlauf mag davon herr \ddot{u} hren, da β dieser „Nebel“ aus zwei verschiedenen Bestandteilen: Dem eigentlichen Nebel und feinen Ru β teilchen besteht, welche letztere weniger gleichf \ddot{o} rmig und au β erdem erheblich gr \ddot{o} β er sind und daher \ddot{u} ber das ganze untersuchte Spektralgebiet hinweg ziemlich gleichm \ddot{a} β ig absorbieren. Ein Vergleich der Messungen von S \ddot{a} urenebel allein und S \ddot{a} urenebel mit Schwarznebel zeigt die stark ausgleichende Wirkung eines Zusatzes von Schwarznebel.

Einem vielhundertfachen Gewinn an Energie bei bestimmter Schichtdicke des Nebels steht also ein recht bescheidener Entfernungsgewinn gegen \ddot{u} ber. Welche Fragestellung entspricht mehr den Verh \ddot{a} ltnissen der Praxis? Um eine bestimmte Schichtdicke, d. h. eine Nebelwand handelt es sich bei k \ddot{u} nstlicher Vernebelung, und die Frage hei β t hier: Wie sehe ich durch die Schicht noch hindurch? Bei Naturnebel dagegen hei β t z. B. f \ddot{u} r die Schifffahrt die Frage: Wie sehe ich weiter wie bisher und um wieviel? Doch kann auch bei Naturnebel der erstere Fall vorliegen, da z. B. die H \ddot{o} henausdehnung von Nebeln oft verh \ddot{a} ltnism \ddot{a} β ig gering ist. In der Praxis wird es sich schon wegen des Unterschiedes der Empfindlichkeit der Empf \ddot{a} nger f \ddot{u} r die verschiedenen Spektralgebiete stets um eine Kombination beider Fragen handeln. Die Frage wird z. B. lauten: Die Schw \ddot{a} chungskoeffizienten zweier Spektralgebiete 1 und 2 verhalten sich wie 20:1, die Empfindlichkeit der Empf \ddot{a} nger f \ddot{u} r diese Gebiete wie 1:10. Wie verhalten sich die Sichtweiten im homogenen Nebel? Man erh \ddot{a} lt f \ddot{u} r die Sichtweiten die Beziehung

Die

(1)

wobei

Schw

 $d_1 =$

empf

Sie i

der

ergib

da m

z. B.

der

 $\alpha_1 c$

(2)

rung

eine

15,7

sehr

Schw

auf

Empf

aber

im M

nung

Stre

deck

nich

wird

rekte

Zusa

licht

Beob

zu F

$$(1) \quad 20 d_1 - d_2 = \frac{\ln 10}{\alpha_2 c}$$

wobei d_1 und d_2 die Sichtweiten, $\alpha_2 = \frac{a_1}{20}$ der frequenzabhängige Schwächungskoeffizient und c die Nebeldichte. Setzt man $d_1 = 1$, so vermindert sich also die bei gleicher Empfängerempfindlichkeit 20fache Vergrößerung der Sichtweite um $\frac{\ln 10}{\alpha_2 c}$.

Sie ist also von der Nebeldichte abhängig und zur Durchführung der Rechnung ist eine Annahme über diese notwendig. Diese ergibt sich zwanglos aus der Empfindlichkeit der Empfänger, da man ja wissen will, wann diese nicht mehr ausreicht. Es soll z. B. angenommen werden, daß der Empfänger 1 noch auf 10^{-4} der ungeschwächten Strahlung anspricht. Hieraus ergibt sich $\alpha_1 c = \ln 10^4$, $\alpha_2 c = \frac{\ln 10^4}{20}$.

$$(2) \quad d_2 = 20 - \frac{\ln 10 \cdot 20}{\ln 10^4} = 17,1.$$

Die Sichtweiten verhalten sich also wie 1:17. Eine Änderung der angenommenen Empfindlichkeit des Empfängers um eine Zehnerpotenz nach oben oder unten ergibt 17,8fache bzw. 15,7fache Sichtweite. Der Einfluß auf das Ergebnis ist nicht sehr erheblich.

2. Einfluß der Trübung auf die Sicht

Die bisherigen Überlegungen berücksichtigten alle nur die Schwächung des direkten Lichtes und es käme danach also nur auf die Schwächung einerseits und die Empfindlichkeit des Empfängers andererseits an. Der Ausdruck „Trübung“ deutet aber bereits darauf hin, und die Beobachtung bestätigt es, daß im Nebel, überhaupt bei jeder Trübung, eine weitere Erscheinung sehr wesentlich mitwirkt, nämlich das — „trübende“ — Streulicht, welches das schwächer werdende direkte Licht überdeckt. Das Strahlungsbild, welches bei reiner Absorption (bei nicht zu großer Tiefenausdehnung des Objektes) erhalten bleibt, wird hierdurch verändert. Zwischen der Schwächung des direkten Lichtes und der Trübung besteht nun kein allgemeiner Zusammenhang. Es läßt sich wohl die Gesamtmenge des Streulichtes berechnen; der Bruchteil aber, welcher sich für den Beobachter dem direkten Licht überlagert, wechselt von Fall zu Fall. Darüber hinaus kann noch in beliebigem Maß Streu-

licht von anderen Lichtquellen, deren Licht sonst nicht in die Blickrichtung fällt, mitwirken. Betrachtungen über den Einfluß einer Trübung, also auch eines Nebels, auf die Sicht und über Mittel zur Verminderung dieses Einflusses können also nur für einen bestimmten Fall durchgeführt werden.

Für die Trübung ist nun bezeichnend:

1. Objekt und trübende Schichten fallen räumlich nicht zusammen.

2. Die Streuung (und damit die Trübung) ist frequenzabhängig.

3. Bei der Zerstreuung ändert sich Polarisierung und Polarisationsgrad der zerstreuten Strahlung.

4. Maßgebend für die Erkennung ist der Unterschied zwischen direktem Licht + Streulicht und dem Streulicht allein.

Daraus ergeben sich grundsätzlich folgende Wege zur Überwindung der Sichtbeschränkung durch die Trübung:

1. Ausschaltung eines Teils des Streulichtes durch geometrisch-optische Mittel (Blenden).

2. Wahl eines bestimmten Spektralgebietes mit geringem Streulicht.

3. Trennung von direktem Licht und Streulicht auf Grund der verschiedenen Polarisierung.

4. Besondere Charakteristik des Empfängers.

In den Fällen, in welchen das Streulicht von verschiedenen Lichtquellen stammt, von denen eine beeinflußbar ist, ist es noch möglich die Strahlung dieser Lichtquelle durch Modulation hervorzuheben. Da das Streulicht dieser Lichtquelle selbst moduliert wird, kommt dieses Mittel nur dann in Frage, wenn der größere Teil der Streustrahlung von anderen Lichtquellen (Tageslicht) stammt. Da es hier nicht möglich ist, hierauf näher einzugehen, sei auf den Bericht von Gresky¹⁾ verwiesen, welcher dies — allerdings vom Standpunkt der Lichttelephonie aus — unternimmt. Dabei ist zu beachten, daß im vorliegenden Fall die Empfangsenergie im günstigsten Falle (Beobachtung einer Lichtquelle) um Größenordnungen geringer ist als bei der Lichttelephonie, wo die Strahlung direkt auf den Empfänger zu gesammelt wird. Es könnte hier also nur unmittelbare, starke Modulation einer starken Lichtquelle nützen.

1) G. Gresky, Phys. Ztschr. 32. S. 193. 1931.

Von den übrigen angeführten Mitteln soll das unter 3. genannte: Trennung auf Grund der verschiedenen Polarisation kurz vorweg besprochen werden, da seine praktische Bedeutung gering erscheint. Unpolarisierte Strahlung wird bei der Zerstreuung teilweise linear polarisiert. Ausnutzung dieser Erscheinung wird dadurch erschwert, daß sie vollständig nur an kleinen Teilchen auftritt, richtungsabhängig ist und daß das Licht in dichtem Nebel durch weitere Zerstreuung teilweise wieder depolarisiert wird. Man könnte umgekehrt daran denken, statt dessen von vornherein z. B. zirkular polarisiertes Licht zu verwenden; aber schon die Erzeugung sehr starker polarisierter Strahlung bietet so viel Schwierigkeiten, daß der erreichbare Nutzeffekt in keinem Verhältnis dazu steht.

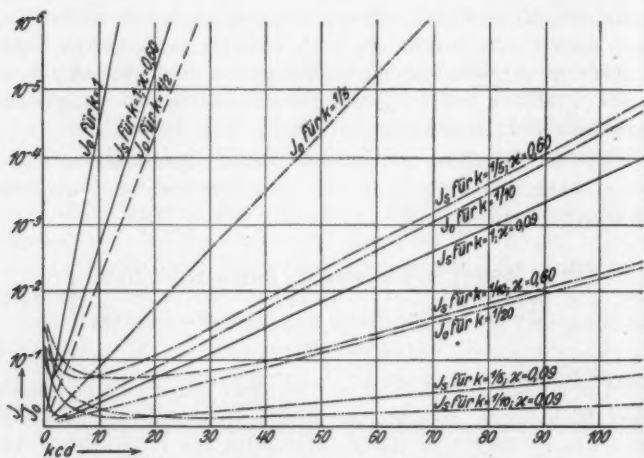
Um die Wirkung der anderen Mittel abzuschätzen, sollen nun anschließend einige praktisch besonders wichtige Fälle kurz untersucht werden.

§ 5. Erkennbarkeit einer Lichtquelle im Nebel

1. Die Überstrahlung des direkten Lichtes durch das Streulicht

Der einfachste Fall liegt vor bei einer punktförmigen, nach allen Richtungen gleichmäßig strahlenden Lichtquelle. Hier steht das Streulicht in festem Verhältnis zur Schwächung des direkten Lichtes, in dem bei reiner Zerstreuung für jeden Ausschnitt aus einer umhüllenden Kugelfläche $J_D + J_S = J_0$ sein muß, wobei J_0 das ursprüngliche ungeschwächte, J_D das unzerstreute und J_S das zerstreute Licht. Der Zusammenhang zwischen J_D und J_S ergibt sich aus Fig. 9. Dieses Diagramm wird später eingehender besprochen werden. Hier soll zunächst daraus nur entnommen werden, daß beim eigentlichen „Nebel“ (hier Säurenebel) schon bei geringen Schwächungen das Streulicht das direkte Licht beträchtlich übersteigt. Festgestellt soll werden, wann die Lichtquelle unsichtbar wird. Dies läßt sich aus dem Verhältnis des direkten Lichtes zum Streulicht erst dann entnehmen, wenn für das Streulicht die Abhängigkeit der Intensität von der Einfallsrichtung bekannt ist. Es ist zu erwarten, daß hierfür bei ausreichender Schichtdicke bzw. Nebeldichte in genügender Näherung das Lambertsche cos-Gesetz zugrunde gelegt werden darf.

Die Berechtigung dieser Annahme wurde durch folgenden Versuch geprüft: Ein im Nebelraum aufgestellter Nernststift wurde auf einem senkrechten Spalt abgebildet, das durchgehende Licht spektral zerlegt und das Spektrum auf einer Mattscheibe entworfen. Bei den gewählten Verhältnissen erschien das Spektrum des Stiftes als ein scharf begrenztes, etwa 2 mm breites Band auf dieser Scheibe. Wurde Nebel entwickelt, so wurde



Unzerstreutes Licht J_0 und Streulicht.
Abhängigkeit von der Dicke bzw. Dichte der Nebelschicht
für verschiedene Schwächungskoeffizienten

Fig. 9

die Helligkeit dieses Bandes geringer und gleichzeitig überlagerte sich in einem Band von etwa 2,5 cm Breite (entsprechend der Spaltlänge) das Spektrum des Streulichtes. Es kam darauf an, festzustellen, bei welcher Schwächung das Verhältnis des direkten Lichtes + Streulichtes zum Streulicht allein so klein geworden war, daß kein Unterschied mehr wahrnehmbar war. Das direkte Licht konnte bei der hierzu erforderlichen starken Schwächung nicht mehr mit Thermosäule und Galvanometer gemessen werden. Zur Messung diente statt dessen eine Photozelle (AEG.; nähere Angaben vgl. § 5, 2); der Strom wurde aus der Entladungszeit eines Elektrometers bestimmt. Die Zelle war lichtdicht ab-

geschlossen und erhielt das Licht durch eine Öffnung, welche so groß war, daß das Bild des Nernststiftes gerade hineinfiel.

Bei den Versuchen wurde das Verschwinden des direkten Bildes (also des mittleren Spektrums) mit dem Auge auf einer Mattscheibe verfolgt und zugleich durch Aufnahmen nachgeprüft. Gleichzeitig wurde dauernd die Schwächung des direkten Lichtes gemessen. Das Bild verschwand bei einer Schwächung des „direkten Strahls“ zwischen etwa $1,5 \cdot 10^{-4}$ bis $0,5 \cdot 10^{-4}$. Nun besteht aber dieser „direkte Strahl“, d. h. die Energie, welche mit dieser Anordnung dafür gemessen wurde, bei so weitgehender Schwächung zu einem erheblichen Bruchteil aus Streulicht. Nimmt man z. B. an, daß bei den gewählten Verhältnissen Helligkeitsdifferenzen von etwa 10 Proz. noch sicher wahrgenommen werden können (die Wahl des Prozentsatzes ist übrigens für die folgende Überlegung nebensächlich), so bedeutet dies, daß beim Verschwinden des direkten Bildes die Helligkeiten im mittleren Streifen (Abbildung des Stiftes + Streulicht) und in den anschließenden Streifen (Streulicht allein) sich etwa wie 110/100 verhalten. Die gleiche Überlegung gilt auch für die Messung des sogenannten „direkten Strahles“. Von der gemessenen Energie entfallen also höchstens 10 Proz., rund $1,0 \cdot 10^{-5}$ der ursprünglichen auf wirklich unveränderte Strahlung.

Statt durch Versuch kann man auch aus den geometrisch-optischen Verhältnissen durch Rechnung ermitteln, bei welcher Schwächung des direkten Lichtes in der Abbildung das Helligkeitsverhältnis zwischen dem mittleren Streifen und den benachbarten Gebieten auf einen bestimmten Wert abgesunken ist. Hierzu ist eine Annahme über die Richtungsverteilung des Streulichtes und über die Verteilung der Schwächung auf Zerstreuung und Absorption erforderlich. Unterstellt man für die Richtungsverteilung das cos-Gesetz und nimmt man schätzungsweise an, daß die Schwächung zu 70 Proz. aus Zerstreuung und zu 30 Proz. aus Absorption besteht, so sollte bei dem eben beschriebenen Versuch das Helligkeitsverhältnis 110/100 bei einer Schwächung des direkten Strahls auf $7,4 \cdot 10^{-5}$ erreicht werden.

Bei so starken Nebeln ist es nicht möglich gerade die gewünschte Dichte zu erreichen und für die zur Messung notwendige Zeit von Minuten (Belichtungszeit sogar 5—6 Minuten)

konstant zu erhalten. Wenn man daher auch von vornherein zwischen Versuch und Rechnung nur eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung erwarten darf, so unterscheiden sich immerhin hier beide um rund eine Zehnerpotenz. Da ein etwaiger Fehler in der Annahme über die Richtungsverteilung keinen so starken Einfluß haben kann, ist der Fehler in der Annahme über den Anteil der Absorption an der Schwächung zu suchen.

2. Die Verteilung der Schwächung auf Zerstreuung und Absorption

Untersuchungen darüber, inwieweit die Schwächung einer Strahlung im Nebel durch Zerstreuung oder durch Absorption erfolgt, waren bisher nicht bekannt geworden. Wie bereits erwähnt, müßte bei einer näherungsweise punktförmigen Lichtquelle bei reiner Zerstreuung der Lichtstrom durch einen Ausschnitt der umhüllenden Kugeloberfläche auch bei Vernebelung stets gleich bleiben. Aus der Abnahme mit zunehmender Vernebelung kann daher der Anteil der Absorption an der Schwächung berechnet werden.

Nach diesem Grundgedanken wurde die Messung mit folgender Anordnung vorgenommen: In der Mitte des Nebelraums wurde eine Eindrahtglühlampe (10 Volt, 8 Amp.; Länge des Glühfadens etwa 15 mm) und radial in 40 cm Entfernung davon zwei Photozellen offen, Rücken an Rücken, aufgestellt. Mit einer dritten Photozelle wurde die Schwächung des direkten Strahls bestimmt, indem damit die Schwächung eines parallelen Strahlenbündels gemessen wurde, wobei ja — bei nicht allzu weitgehender Schwächung — das mitgemessene Streulicht vernachlässigt werden kann. Verwendet wurden Vakuumphotozellen der AEG.¹⁾ (Kalium mit Zusätzen; wirksamer Spektralbereich: $\lambda = 0,35\text{--}0,65\ \mu$; höchste Empfindlichkeit bei $\lambda \sim 0,4\ \mu$, von da ungefähr linearer Abfall bis $0,65\ \mu$; absolute Ausbeute: $\sim 6 \cdot 10^{-3}$ Coul/cal bei $\lambda = 400\text{ m}\mu$). Die Entfernung zwischen den beiden Photozellen und der Lichtquelle wurde so gering gewählt, um den Einfluß von Reflexion und Absorption der Wände möglichst zu verringern. Es wurde vernebelt und die Intensitätsabnahme (bei der dem Licht zugewandten) bzw. Zunahme (bei

1) Die Photozellen haben wir der Liebenswürdigkeit des Hrn. Dr. W. Kluge, Forschungsinstitut der AEG., zu verdanken.

Die

der h
Chlor
fängli
starke
Fig. 1
bestel
nebel
aus A
der n

abgez
Streul

A
daß v
z Pro
im vo
Verhä
welch
hervor
aus Z
weils
Absor
eine K
diese

Beziel

Ann

der hinteren Photozelle) bei verschiedenen Nebeln (Säurenebel, Chlorzinknebel, Schwarznebel) und Nebeldichten gemessen. Anfänglich entstanden dabei Isolationsschwierigkeiten durch die starken Niederschläge der Nebel, vor allem des Schwarznebels. Fig. 10 zeigt die Ergebnisse dieser Messungen. Die Schwächung besteht also beim Säurenebel zu etwa 15 Proz., beim Chlorzinknebel zu etwa 30 Proz. und beim Schwarznebel zu etwa 80 Proz. aus Absorption. Bei der Berechnung des Streulichtes ist hierbei der nach rückwärts (auf die Lichtquelle zu) zerstreute Anteil

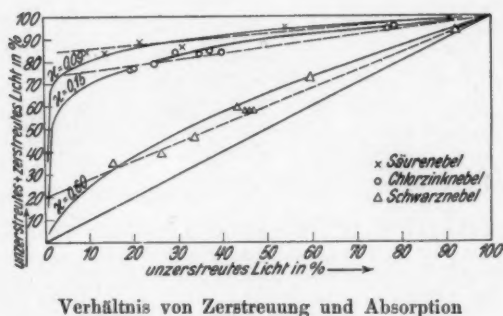


Fig. 10

abgezogen; er betrug maximal nur etwa 4 Proz. des gesamten Streulichtes.

Aus diesen Messungen darf aber nicht geschlossen werden, daß von der Schwächung stets etwa α Proz. auf Zerstreuung, α Proz. auf Absorption entfallen und daß daher die Annahme im vorigen Abschnitt von 70 Proz. Zerstreuung ungefähr den Verhältnissen entspricht. Es geht vielmehr aus diesen Messungen, welche bei verhältnismäßig geringen Trübungen erfolgten, nur hervor, daß von jeder Schwächung der direkten Strahlung α Proz. aus Zerstreuung und α Proz. auf Absorption entfallen. Das jeweils entstehende Streulicht erleidet aber weiterhin im Nebel Absorption und der annähernd lineare Verlauf in Fig. 9 ist nur eine Folge des gewählten Abszissenmaßstabes. Man erhält für diese Absorption unter Vernachlässigung der Rückstrahlung die Beziehung $\frac{dJ}{dx} = -\alpha J$, wobei also den Anteil der Absorption

an jedem Schwächungsvorgang bedeutet. Hieraus erhält man für das Streulicht J_S die Beziehung:

$$(3) \quad J_S = J_0 \frac{e^{\alpha c d} - e^{\kappa \alpha c d}}{e^{\alpha c d} (\kappa + 1)}.$$

Zum Vergleich der Rechnung mit dem Versuch ist die Berechnung für $\kappa = 0,09, 0,15$ und $0,60$ durchgeführt und in Fig. 10 eingetragen. Die drei Kurven entsprechen ungefähr den drei untersuchten Nebeln. Die starke Abnahme des Streulichtes infolge der Absorption macht sich also erst bei starken Trübungen geltend. Bei dem Versuch über das Verschwinden des direkten Bildes (§ 5,1) lag eine Schwächung von der Größenordnung 10^{-5} vor. Bei einer solchen Schwächung des direkten Lichtes errechnet sich mit einem Absorptionskoeffizienten κ von $0,12$, welcher mit den Messungen in Einklang steht, das Streulicht zu $0,1 J_0$. Die starke Abnahme des Streulichtes bei großen Dichten bzw. Schichtdicken erklärt also die dort festgestellte Abweichung von Versuch und Rechnung.

3. Folgerungen für die Erkennbarkeit einer Lichtquelle

Es sei nochmals auf die Fig. 9 hingewiesen. Aufgetragen ist dort das Verhältnis des direkten Lichtes J_D bzw. des Streulichtes J_S zur ursprünglichen (ungeschwächten) Strahlung (in logarithm. Maßstab) in Abhängigkeit von den Schwächungskoeffizienten $k c d = (\alpha + \kappa) c d$. Diesem Diagramm ist zunächst zu entnehmen, in welchem Verhältnis die durchgelassenen Beträge an direktem Licht verschiedener Strahlungen stehen. Nimmt man z. B. die Nebeldichte c als konstant an, deutet also die Abszissen als Entfernungen (Schichtdicken) d , so kann man, ähnlich wie früher in Fig. 8, ablesen, in welchem Verhältnis Strahlungen mit verschiedenen Schwächungskoeffizienten nach Durchgang durch eine Nebelschicht bestimmter Dicke stehen. Der Entfernungsgewinn ergibt sich bei Annahme gleicher Empfindlichkeit der Empfänger für die verschiedenen Spektralgebiete ohne weiteres aus dem Verhältnis der Schwächungskoeffizienten. Hier ist es nun möglich auch den Einfluß verschiedener Empfindlichkeit der Empfänger, welcher bereits einmal (§ 4,1) für einen bestimmten Fall berechnet wurde, sofort abzulesen. Es sollen z. B. die Schwächungskoeffizienten zweier Strahlungen mit den Wellenlängen λ_1 und λ_2 sich wie $10:1$ verhalten und die Empfindlichkeiten der Empfänger für

diese Strahlungen im gleichen Verhältnis stehen, wobei die Empfindlichkeit des Empfängers für $\lambda_1 J_0 \cdot 10^{-5}$ betragen soll. Es ergibt sich dann aus dem Schnittpunkt von J_D für $k = 1$ mit der Ordinate $10^{-5} d_1$ zu 11,5, aus dem Schnittpunkt von J_D für $k = 1/10$ mit der Ordinate $10^{-4} d_2$ zu 92, der Entfernungsgewinn also zu 8. Außer dem direkten Licht ist für einige Werte von k ($k = 1, 1/4, 1/10$) auch das Streulicht aufgetragen und zwar jeweils für einen „echten“ Nebel mit geringer Absorption (Säurenebel) und für Schwarznebel mit großer Absorption. Wie man sieht, wird das Streulicht schon sehr bald stärker als das unzerstreute Licht und nimmt bei den echten Nebeln so langsam ab, daß es das direkte Licht immer mehr um Größenordnungen überwiegt. Im kritischen Bereich ($J_D = J_0 \cdot 10^{-5}$ ($\sim 10^{-6}$) verschwindet das Bild also infolge der starken Abnahme von J_D , während das Streulicht J_S sich wenig ändert. Beim Schwarznebel dagegen sind Abstand und Neigung der zusammen gehörenden Kurven von J_D und J_S gegeneinander so gering, daß das Streulicht, welches sich ja in der Fig. 10 über den Bildgrund verteilt, keinen starken Einfluß mehr hat.

Allerdings war es nicht möglich bei der Darstellung in Fig. 9 Rücksicht darauf zu nehmen, daß im Ultraroten nur die Schwächungskoeffizienten, nicht aber die Zerstreuungs- bzw. Absorptionskoeffizienten bestimmt werden konnten, und es ist daher fraglich, inwieweit die so gewonnenen Ergebnisse für das ganze Spektralgebiet, soweit es hier in Betracht kommt, zugrunde gelegt werden dürfen. Man wird annehmen dürfen, daß im Ultraroten die Zerstreuung bestimmt nicht mehr, wahrscheinlich aber erheblich geringer an der Schwächung beteiligt ist, als im Sichtbaren, so daß für dieses Gebiet die angegebenen Kurven nur als obere Grenze anzusehen sind. Im übrigen ist, wie sogleich ausgeführt wird, im Ultraroten das Streulicht ohnedies von geringerer Bedeutung.

Von den Mitteln zur Verbesserung der Sicht kommen die unter 1. genannten geometrisch-optischen in einem ausgedehnten Nebel nicht in Frage, da der Hauptteil des Streulichtes in der Nähe der Lichtquelle entsteht. Nur in dem einen Fall, daß nur der Beobachter im Nebel steht, während die übrige Strecke nebelfrei ist, wären solche Mittel von Vorteil.

Die Wirkung des unter 2. genannten Mittels: Verlegung des Erkennungsvorgangs in ein bestimmtes Spektralgebiet ist

aus dem bisher Besprochenen genügend zu entnehmen. Bei allen Betrachtungen über einen etwaigen Entfernungsgewinn darf aber, wenn für die Sichtweite nicht das Verhältnis von direktem Licht zum Streulicht, sondern der Absolutbetrag des direkten Lichtes bestimmend ist, die Intensitätsabnahme mit dem Quadrat der Entfernung nicht übersehen werden.

Die unter 4. genannte besondere Charakteristik des Empfängers besteht darin, daß grundsätzlich jeder künstliche Empfänger so beschaffen sein kann, daß seine Anzeige im Gegensatz zum Auge (Weber-Fechnersches Gesetz) nur von den absoluten Helligkeitsdifferenzen abhängt, das Streulicht also — von extremen Fällen abgesehen — für ihn unschädlich ist. Es kommt also dann nur auf die Empfindlichkeit des Empfängers einerseits und die absolute Schwächung andererseits an, so daß unter Umständen sogar das Arbeiten in einem Spektralgebiet mit starker Schwächung vorteilhaft sein kann, wenn für dieses Gebiet ein besonders empfindlicher Empfänger zur Verfügung steht.

Bisher wurde nur die Strahlung der Lichtquelle selbst berücksichtigt. Weiteres Streulicht von anderen Lichtquellen herrührend (Tageslicht) ändert an diesen Überlegungen wenig; für das Auge kann die Sicht dadurch allerdings erheblich verschlechtert werden.

§ 6. Erkennbarkeit eines Objektes im Nebel bei diffuser Beleuchtung (Tageslicht)

Gegeben sei ein Objekt im dichten Nebel bei Tageslicht, welches von der auffallenden Strahlung im Bruchteil a absorbiert und im Bruchteil $(1 - a)$ diffus reflektiert. Es soll untersucht werden, welchen Helligkeitseindruck ein Beobachter von diesem Objekt bzw. seiner Umgebung erhält. Die Wirkung der Trübung besteht darin, daß die scheinbare Helligkeit des Objektes zunimmt. Diese Erscheinung ist bei schwachen Trübungen öfters untersucht worden mit dem Ziel, aus der Aufhellung den Zerstreuungskoeffizienten der Atmosphäre zu bestimmen. Es sei hier auf eine Arbeit von Löhle¹⁾ verwiesen, welche auch Literaturangaben enthält. Löhle erhält für das Streulicht bei reiner Zerstreuung die Beziehung

$$(4) \quad J_{s,d} = \text{const} (1 - e^{-\alpha d}),$$

1) F. Löhle, Ztschr. f. techn. Phys. 10. S. 428. 1929.

analog der bisherigen Beziehung

$$(5) \quad J_s = J_0 (1 - e^{-acd}),$$

nur das eben an Stelle von J_0 eine Konstante tritt, welche von dem Betrag der Einstrahlung in den Nebel abhängt. Er betrachtet sodann die Gesamtstrahlung, welche von einem diffus reflektierenden Objekt zum Beobachter gelangt und erhält dafür aus obiger Formel die Gleichung

$$(6) \quad J_1 = a E e^{-acd} + J_{s,d},$$

wobei E die Beleuchtungsstärke am Objekt bedeutet. Ist die Trübung so stark, daß das Objekt praktisch nur durch zerstreute Strahlung erhellt wird, so kann man in dieser Gleichung statt E $J_{s,\infty}$ setzen, also den Gesamtbetrag, der aus allen Schichten auf eine Flächeneinheit auftreffenden Streustrahlung. Damit geht also die Formel (6) über in

$$(7) \quad J_1 = a J_{s,\infty} \cdot e^{-acd} + J_{s,d}.$$

Von der Umgebung des Objektes erhält der Beobachter den Helligkeitseindruck

$$J_2 = J_{s,\infty}.$$

Das Verhältnis der Helligkeitseindrücke von Objekt und Hintergrund, welches (neben der Helligkeitsdifferenz) für die Wahrnehmung maßgebend ist, ergibt sich also zu

$$(8) \quad \frac{J_1}{J_2} = a \cdot e^{-acd} + \frac{J_{s,d}}{J_{s,\infty}}.$$

Setzt man für

$$(9) \quad J_{s,d} = C (1 - e^{-acd})$$

$$(10) \quad J_{s,\infty} = C (1 - e^{-ace\infty}),$$

so wird

$$(11) \quad \frac{J_{s,d}}{J_{s,\infty}} = 1 - e^{-acd}.$$

Man erhält damit im Endergebnis

$$(12) \quad \frac{J_1}{J_2} = 1 - \frac{1-a}{e^{acd}}.$$

Das bedeutet: Die Helligkeit des Objektes ist stets gleich oder kleiner als die der Umgebung und der Helligkeitsunterschied wird um so größer, je geringer das Reflexionsvermögen des Objektes ist. Dies entspricht der Erfahrung, daß bei Tageslicht im dichten Nebel alle Objekte dunkel erscheinen und um so besser wahrzunehmen sind, je dunkler sie sind.

Der entsprechende Ausdruck für die Helligkeitsdifferenzen lautet

$$(13) \quad J_2 - J_1 = C e^{-\alpha c d} (1 - a),$$

führt also zu den gleichen Folgerungen. Bei Berücksichtigung der Absorption erhält man, wenn κ der Absorptionskoeffizient, die Beziehungen

$$(14) \quad \frac{J_1}{J_2} = 1 - \frac{1 - a}{e^{(\alpha + \kappa) c d}}$$

$$(15) \quad J_{s, 1, 2} = \frac{\alpha}{\alpha + \kappa} C (1 - e^{-(\alpha + \kappa) c d})$$

und

$$(16) \quad J_2 - J_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \kappa} \frac{C}{e^{(\alpha + \kappa) c d}} (1 - a).$$

Die Änderung von (14) gegenüber (12) besteht nur darin, daß an Stelle von α jetzt $k = \alpha + \kappa$ tritt. Für das Helligkeitsverhältnis ist also belanglos, ob und in welchem Verhältnis die Schwächung aus Zerstreuung oder Absorption besteht, da ja nach der Annahme das Objekt nur durch Streulicht erhellt wird. Fragt man nach der Erkennungsmöglichkeit, so muß man gleichzeitig (15) mit heranziehen und sieht, daß hierfür, wie zu erwarten, nicht allein die Schwächung, sondern ihre Verteilung auf Zerstreuung und Absorption maßgebend ist, da die Absolutwerte von J_1 und J_2 sehr stark hiervon abhängen. Für die Helligkeitsdifferenzen geht dasselbe aus Gleichung (16) ohne weiteres hervor. Den Faktor $C \frac{\alpha}{\alpha + \kappa}$ kann man als „Hintergrund“ auffassen, von welchem sich das Objekt abhebt.

Vorausgesetzt ist bei diesen Überlegungen, daß das Objekt frei steht, d. h. vom Beobachter aus gesehen nur an Nebel grenzt und die Entfernung vom wirklichen Hintergrund so groß bzw. α und κ so beträchtlich sind, daß dessen Einfluß vernachlässigt werden kann. Die letztere Voraussetzung wird bei stärkeren Trübungen häufig, die erstere dagegen selten praktisch vollständig erfüllt sein. Randeffekte und etwaige Beeinflussung der Lichtverteilung im Streulicht durch das Objekt sollen unberücksichtigt bleiben, da es hier nur auf das Grundsätzliche der Erscheinungen ankommt.

Von den Mitteln zur Verbesserung der Sicht kommt demnach hier höchstens das unter 4. aufgeführte (Besondere Charakteristik des Empfängers) in Frage; denn die anderen dienen dazu,

das Streulicht auszuschalten, würden hier also die Erkennbarkeit des Objektes verringern.

**§ 7. Erkennbarkeit eines Objektes im Nebel
bei einseitiger direkter Beleuchtung**

Praktisch wichtig sind nun vor allem noch die Fälle, in denen ein Objekt nicht — oder nicht allein — von diffuser Strahlung erhellt, sondern einseitig durch eine künstliche Lichtquelle (z. B. Scheinwerfer) beleuchtet wird. Es ist nicht möglich, diesen Fall im Rahmen dieser Arbeit auch nur annähernd aufzuklären, da selbst bei weitgehender Vereinfachung des Problems die Verhältnisse recht verwickelt sind und zur Berechnung Annahmen notwendig werden, deren Berechtigung experimentell noch nicht geprüft ist. Es seien daher hier nur die wichtigsten der neu auftretenden Gesichtspunkte hervorgehoben:

Denkt man sich ein Objekt im Nebel, welches aus der Entfernung d mit einem parallelen Strahlenbündel beleuchtet wird, so ist die Intensität der auf das Objekt auftreffenden Strahlung $J = J_0 e^{-kcd}$, da der auf das Objekt fallende Bruchteil des Streulichtes in einem solchen Fall zunächst vernachlässigt werden kann (vgl. § 2, 2). Von dieser auftreffenden Strahlung wird der Bruchteil $(1 - a)$ diffus reflektiert und hiervon gelangt der Anteil ε zum Beobachter, welcher sich bei der Lichtquelle befinden soll, zurück, wobei er nochmals geschwächt wird. Der Faktor ε , der angibt, wieviel von der diffus zerstreuten Strahlung vom Beobachter wahrgenommen wird, berechnet sich in bekannter Weise aus der Entfernung und dem Durchmesser der Auffangfläche des Beobachtungsapparates. Der Beobachter erhält also vom Objekt den Lichteindruck

$$(17) \quad J_1 = (J_0 e^{-kcd}) \varepsilon (1 - a) e^{-kcd} = J_0 (1 - a) \varepsilon e^{-2kcd}.$$

Fragt man nun nach dem Helligkeitseindruck J_2 , welchen er von der Umgebung des Objektes erhält, so wird dieser nach den bisherigen Annahmen 0, was der Erfahrung widerspricht. Dies kommt daher, daß bisher die Richtungsabhängigkeit der Zerstreuung nicht berücksichtigt wurde, deren Einfluß in dem früher besprochenen Sonderfall gleichmäßiger Lichtausbreitung nach allen Richtungen (§ 5) nicht berücksichtigt zu werden brauchte, da dort die Zerstreuung keine Richtungsänderung des Energieflusses bewirken kann. Dagegen kommt es hier entscheidend darauf an, welcher Bruchteil des Streulichtes zum

Beobachter zurückgestrahlt wird. Messungen bestehen hierüber nicht. Einen Anhaltspunkt über die Größe dieses Anteils gibt Mecke¹⁾, welcher ihn auf Grund der Angaben von Wiener²⁾ für sichtbares Licht zu 0,07 berechnet. Mangels anderer Angaben wird man zunächst mit diesem Werte rechnen müssen. Die Formeln, welche sich bei Berücksichtigung der Aufteilung des Streulichtes in einen Anteil, welcher nach vorwärts, und einen Anteil, welcher nach rückwärts gestreut wird, ergeben, hat bereits Mecke in der eben erwähnten Arbeit abgeleitet. Es sollen daher nur die Ergebnisse angeführt werden:

Für das gesamte Licht in Richtung des Strahles erhält man

$$(18) \quad J_v = J_0 \frac{1}{1 + \beta \alpha c d}.$$

Für das nach rückwärts zerstreute Licht

$$(19) \quad J_r = J_0 \frac{\beta \alpha c d}{1 + \beta \alpha c d},$$

wobei α , c , d die gleiche Bedeutung haben wie bisher (Mecke setzt l statt $c \cdot d$), während β (von Mecke zu 0,07 berechnet) der Rückstreuungskoeffizient ist. Damit erhält man also für den Helligkeitseindruck von der Umgebung des Objektes

$$(20) \quad J_z = J_0 \frac{\beta \alpha c d}{1 + \beta \alpha c d}.$$

Dieser Ausdruck konvergiert für $d = \infty$ nach 1, so daß

$$(21) \quad J_z = J_0.$$

Strenggenommen sollte man nun auch bei der Betrachtung des Helligkeitseindruckes J_1 , welchen der Beobachter vom Objekt erhält, die stärkere Beleuchtung dieses Objektes durch das hinkommende Streulicht sowie die Aufhellung durch das zum Beobachter zurückgestreute Licht berücksichtigen. Es wird aber für diese Betrachtung genügen, wenn man zunächst nur den letzteren Anteil hinzufügt. Dieser beträgt

$$(22) \quad J_r = J_0 \frac{\beta \alpha c d}{1 + \beta \alpha c d}.$$

Das Helligkeitsverhältnis wird damit zu

$$(23) \quad \frac{J_1}{J_z} = (1 - \alpha) e^{-2\kappa c d} + \frac{\beta \alpha c d}{1 + \beta \alpha c d}.$$

1) R. Mecke, Ann. d. Phys. **65**. S. 257. 1921.

2) Chr. Wiener, Nova Acta Halle **73**. S. 1. 1900; **91**. S. 1. 1909.

Beide Summanden sind echte Brüche, der erste sogar, selbst wenn man das Reflexionsvermögen des Objektes zu 100 Proz. annimmt, beträchtlich < 1 . Das Objekt müßte also, selbst wenn es „weiß“ ist, auch bei stärkster Beleuchtung stets dunkler erscheinen als die Umgebung, sich also von einem hellen Hintergrund dunkel abheben.

An diesem neuerlichen Widerspruch mit der Erfahrung sind zwei weitere Vernachlässigungen schuld. Zunächst wurde bisher nur die Zerstreuung, nicht aber die Absorption berücksichtigt. Bei einem β von 0,07 macht sich aber schon eine verhältnismäßig geringe Absorption stark geltend, da ja ein Teil des zum Beobachter zurückgelangenden Streulichtes entfernten Nebelschichten entstammt. Die genauere Formel, die sich bei Berücksichtigung der Absorption für J_r ergibt,

$$(24) \quad J_r = J_0 \frac{(1 - \delta)^2 (e^{\gamma a c d} - e^{-\gamma a c d})}{(1 + \delta)^2 e^{\gamma a c d} - (1 - \delta)^2 e^{-\gamma a c d}}$$

findet sich ebenfalls bei Mecke. Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt worden:

$$\gamma = \sqrt{x(x + 2\beta)} \quad \delta = \sqrt{\frac{x}{x + 2\beta'}} \quad \beta' = (1 - x)\beta.$$

Dieser Ausdruck ist etwas unübersichtlich. Man übersieht aber leicht, daß er für $d = \infty$ nach einem bestimmten Wert konvergiert, welcher durch den Ausdruck $\frac{1 - \delta^2}{(1 + \delta)^2}$ gegeben ist. Für $\beta = 0,07$ und $x = 0,09$, welcher Wert sich z. B. für Säurenebel ergeben hatte, erhält man für J_2 :

$$J_2 = J_{r, \infty} = 0,656 J_0,$$

also schon einen beträchtlich geringeren Wert.

Der zweite Fehler der Betrachtung besteht darin, daß wohl das Streulicht in zwei Anteile J_v und J_r getrennt wurde je nachdem, ob es in oder gegen die Einfallsrichtung der Strahlung zerstreut wird, daß aber nicht berücksichtigt wurde, daß der gestreute Anteil von J_v bzw. J_r nunmehr nicht mehr parallel gerichtet ist sondern divergiert. Es müßte also das jeweils von einer dünnen Nebelschicht $d x$ zurückgeworfene Licht $d J$ noch mit einem Faktor versehen werden, welcher seinerseits von dem Abstand dieser Nebelschicht vom Beobachter abhängig wäre.

Es soll nun davon abgesehen werden, die vorher aufgestellte Gleichung auf Grund dieser Überlegungen zu ändern, da eine Gleichung dazu verleitet, damit zu rechnen, während es sich in Wirklichkeit nur um rohe Betrachtungen handelt. Diese enthalten übrigens noch eine weitere sehr wesentliche Vereinfachung, indem es sich in praktischen Fällen im Gegensatz zur Annahme hier stets um ein verhältnismäßig *schmales* (paralleles oder richtiger: schwach divergierendes) Strahlenbündel handelt. Dadurch hängt der Eindruck des Objektes bzw. der Umgebung des Objektes auf den Beobachter sehr stark davon ab, welche Stellung dieser zum Strahlenbündel einnimmt. So einfach und selbstverständlich diese Tatsache ist, so schwierig ist es ihren Einfluß zahlenmäßig anzugeben.

Welche Folgerungen lassen sich nun vorläufig aus diesen Überlegungen ziehen?

1. Das Helligkeitsverhältnis J_1/J_2 ist von J_0 unabhängig. Die Wahrnehmbarkeit des Objektes ist also bei Beobachtung mit dem Auge von der Beleuchtung unabhängig. (Dies gilt natürlich nur in gewissen Grenzen, da bei sehr geringer Beleuchtung der Eindruck unter die Reizschwelle sinkt, bei sehr starker das Auge geblendet wird. Stärkere Beleuchtung ist also in diesem Fall sogar schädlich. Bei künstlichen Empfängern wird dagegen die Wahrnehmbarkeit in der Regel mit der absoluten Beleuchtungsstärke zunehmen).

2. Das Helligkeitsverhältnis J_1/J_2 bzw. der Helligkeitsunterschied $J_1 - J_2$ hängen sehr stark von dem Rückstreuungskoeffizienten β ab. Zunächst ist also experimentelle Bestimmung von β und seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge erforderlich.

Nun sei noch kurz bemerkt, welchen Nutzen die im letzten Abschnitt aufgeführten Mittel zur Sichtverbesserung im vorliegenden Falle haben könnten:

1. Geometrisch-optische Mittel (Blenden)

Ausgeblendet kann nur der Teil des Streulichtes werden, welcher in der Nähe des Beobachters entsteht. Es scheiden daher von vornherein alle Fälle aus, in welchen es dem Beobachter möglich ist sich seitlich vom Strahl aufzustellen. Ob in den übrigen Fällen ein nennenswerter Gewinn entsteht, könnte zunächst nur ein Versuch entscheiden.

2. Übergang in ein anderes Spektralgebiet

Da ein Objekt, welches ein gewisses mittleres Reflexionsvermögen besitzt, je nach den Werten des Rückstrahlungs- bzw. Absorptionskoeffizienten des Nebels dunkler oder heller erscheinen kann als der Nebelhintergrund, so können auch Fälle eintreten, in denen die Wahrnehmbarkeit zu einem Minimum wird. Erscheint also ein bestimmtes Objekt in einer gewissen Entfernung bei Betrachtung mittels einer Strahlung, deren Zerstreuungskoeffizient groß und deren Schwächung daher ebenfalls groß ist, dunkler als die Umgebung, so wird bei Verwendung einer anderen Strahlung, welche weniger zerstreut und damit auch weniger geschwächt wird, der Hintergrund dunkler, das Objekt gleich hell oder heller erscheinen. Die Erkennbarkeit des Objektes nimmt also ab, trotzdem man die neue Strahlung wegen ihres kleineren Schwächungskoeffizienten zunächst für vorteilhafter halten möchte.

Diese Betrachtungen galten alle nur für ein Objekt in einem ausgedehnten Nebel, also für den Fall, daß der Nebel selbst den Hintergrund für das Objekt bildet. Handelt es sich statt dessen nur um eine begrenzte Nebelschicht zwischen Beobachter und Objekt, so gelten an ihrer Stelle sinngemäß alle Überlegungen, welche in § 5 für die Erkennbarkeit einer Lichtquelle entwickelt wurden. Eine besondere Schwierigkeit gegenüber diesem Fall liegt allerdings bei dem jetzt vorliegenden darin, daß auch bei starker Beleuchtung die vom Objekt bzw. Hintergrund zum Beobachter zurückgeworfenen Lichtmengen sehr gering sind.

§ 9. Bemerkungen zur Empfängerfrage

Bei allen Überlegungen über einen etwaigen Sichtgewinn durch Verlegung des Sehvorganges ins ultrarote Spektralgebiet war bisher ganz außer Betracht gelassen worden, ob für dieses Gebiet Strahler ausreichender Intensität und Empfänger genügender Empfindlichkeit vorhanden oder zu erwarten sind. Zu diesen Fragen ist allgemein zu bemerken:

Die Erzeugung bietet keine besonderen Schwierigkeiten, da beim Kohlelichtbogen (Reinkohlen) das Schwergewicht der Strahlung noch im kurzwelligen Ultrarot liegt. Wesentlich schlechter ist es aber um genügend empfindliche Empfänger bestellt. Als solche kommen, wenn ein Bild des Objektes verlangt wird, also geringe Trägheit Bedingung ist, heute nur licht-

elektrische Empfänger in Frage. Nach den bisherigen Veröffentlichungen z. B. über die Versuche mit Lichttelefonie¹⁾ ist man anscheinend bis jetzt bei praktischen Versuchen noch nicht über höchstens $1,2 \mu$ hinausgekommen. Betrachtet man daraufhin nochmals das Verhältnis der Schwächungskoeffizienten (Fig. 5), so findet man, daß z. B. bei Säurenebel der Entfernungsgewinn bei Verwendung einer Strahlung von etwa $1,2 \mu$ 4 beträgt gegenüber einem Höchstwert von 18 bei $2,7 \mu$. Geht man von dem Energiegewinn bei gleicher Entfernung aus, so liegen die Verhältnisse natürlich wieder etwas günstiger (Fig. 8). Es sei hier nochmals auf den Bericht von Gresky¹⁾ verwiesen, welche eine ausführliche Zusammenstellung von Arbeiten zur Empfängerfrage bringt. Kritische Betrachtung der Originalarbeiten ist allerdings vor der Schlußfolgerung anzuraten.

Handelt es sich nicht darum, das Bild eines Objektes zu entwerfen, sondern nur darum, die Richtung einer Strahlungsquelle (oder Senke: Eisberg) festzustellen, so kommen auch die Empfänger in Betracht, welche die Wärmewirkung der Strahlung ausnutzen und daher zum Empfang von Strahlung beliebiger Wellenlänge brauchbar sind. Gresky bespricht solche Empfangsanordnungen, welche er als „Wärmesuchgerät“ bezeichnet, in seiner bereits erwähnten Arbeit. Es sind dabei eigentlich zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die zu empfangende Strahlung entweder als unbeabsichtigte Nebenwirkung entsteht, oder absichtlich für den Empfang erzeugt wird.

Im ersteren Falle handelt es sich um Strahlungsquellen mit niederer Temperatur (Schornstein, Verbrennungsmotor) und die Strahlung ist daher arm an ultraroten Strahlen kürzerer Wellenlänge. Bei längeren Wellen (von etwa $3-4 \mu$ ab) ist aber schon bei ungetrübter Atmosphäre stärkere Absorption zu befürchten²⁾. Zahlenmäßige Untersuchungen über die zur Verfügung stehenden Strahlungsmengen und ihre spektrale Verteilung einerseits, und die Schwächung von Ultrarotstrahlung größerer Wellenlänge andererseits, scheinen noch nicht vorzuliegen. Gelegentliche Mitteilungen über gelungene Versuche erlauben noch kein Urteil über die praktische Verwertbarkeit.

Im zweiten Fall handelt es sich um die bereits früher besprochene Erkennbarkeit einer Lichtquelle. Es ist durchaus

1) G. Gresky, Phys. Ztschr. **32**. S. 193. 1931.

2) F. Schröter, E. N. T. **7**. S. 1. 1930.

möglich, daß diese im Nebel unter Verwendung ultraroter Strahlung verbessert wird. Man wird aber den Nachweis, daß ein etwaiger Gewinn durch die Verwendung gerade ultraroter Strahlung erreicht worden ist, erst dann für geführt ansehen dürfen, wenn dies durch eine Gegenprobe mit sichtbarem Licht unter Verwendung einer auf dem gleichen Grundsatz beruhenden und gleich empfindlichen Empfangsanordnung bestätigt worden ist. Dies um so mehr, da zum Anpeilen einer Lichtquelle nicht nur das unzerstreute Licht, sondern auch das Streulicht dienen kann. Welche Peilschärfe im letzteren Falle erreichbar ist, bleibe zunächst offen. Immerhin ist es möglich, so daß also beim Anpeilen die Zerstreuung der Strahlung wesentlich weniger schädlich wirkt als die Absorption.

Zusammenfassung

Es wurde der Einfluß einiger künstlicher Nebel auf Strahlung der Wellenlängen $0,40-4,0\ \mu$ untersucht. Es wurde festgestellt, daß die Schwächung der Strahlung durch diese Nebel stark von der Wellenlänge abhängt und im allgemeinen mit zunehmender Wellenlänge abnimmt. Weiter wurde untersucht, wie sich die Schwächung auf Zerstreuung und Absorption verteilt und wie sich diese Verteilung auf die Sicht auswirkt. Im Anschluß daran wurden einige allgemeine Gesichtspunkte über Sichtverhältnisse in trüben Medien entwickelt und Mittel zu ihrer Verbesserung besprochen. Unter diesen tritt die Verlegung des Erkennungsvorgangs ins ultrarote Spektralgebiet (über $1,2\ \mu$ hinaus) vorläufig zurück, da der erreichbare Gewinn bei den untersuchten Nebeln im allgemeinen selbst dann nicht groß ist, wenn es gelingen sollte, die Schwierigkeiten in der Empfängerfrage zu überwinden. In bestimmten Fällen scheint es möglich, mit den heute zur Verfügung stehenden Mitteln eine Verbesserung der Sicht zu erreichen. Da künstliche Nebel auch als Wassernebel, nur mit anderen Kondensationskernen, anzusehen sind, so wird man bei natürlichen Nebeln wohl ähnliche Ergebnisse erwarten dürfen.

Die Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Erlangen ausgeführt. Dem Vorstand des Instituts, Hrn. Prof. Dr. B. Gudden, bin ich für seinen Rat und seine Unterstützung bei der Durchführung der Arbeit zu tiefem Dank verpflichtet.

Der Minimax-A.-G., den Firmen Fahlberg, List & Co., Kahlbaum und der Farben-I. G. haben wir für die Überlassung der Chemikalien für die Vernebelung zu danken. Hrn. Dr. O. Treichel der Minimax A.-G. danken wir für seine Vermittlung in dieser Angelegenheit und seine Ratschläge. Außerdem haben die Siemens-Schuckertwerke, Nürnberger Werk, und Carl Zeiss, Jena, letztere unter freundlicher Vermittlung des Hrn. Dr. G. Hansen, die Arbeit durch leihweise Überlassung je eines Parabolspiegels unterstützt. Wir möchten ihnen auch an dieser Stelle dafür danken.

Schließlich sei betont, daß diese wie viele andere Arbeiten aus dem Erlanger Institut nur durch die dankenswerte geldliche Unterstützung des Instituts durch die hiesige Firma Reiniger, Siemens, Veifa ermöglicht wurde.

(Eingegangen 29. Mai 1931)

Die Elektronenleitfähigkeit der Kupferoxyde

Von M. Le Blanc und H. Sachse

(Mit 5 Figuren)

In zwei vorangegangenen Arbeiten¹⁾ haben wir die Frage behandelt, unter welchen Umständen bei festen Oxyden erhebliche Elektronenleitfähigkeit auftritt. Sie kann auftreten entweder bei ungesättigten Oxyden, in denen nicht beanspruchte Valenzelektronen als Leitungselektronen fungieren, oder bei höheren Oxyden, deren aktiver, über die Normalvalenzstufe vorhandener Sauerstoff Elektronen einer inneren Schale beansprucht und einen Störfaktor darstellt, der zur Abgabe von Leitungselektronen führt. Typische Beispiele für den ersten Fall sind die Oxyde des Indiums (InO) und des Urans (UO_2), für den zweiten Fall die des Mangans (MnO_2) und des Nickels ($\text{NiO}_x: x > 1$). Alle normalen Oxyde zeigen sehr geringe Elektronenleitfähigkeit. Wir verstehen unter normalen Oxyden solche, bei denen nur die Elektronen der äußersten Schale chemisch gebunden sind und der übrige Rest des Atoms eine verhältnismäßig stabile Elektronenkonfiguration besitzt.

Das Kupfer sollte sich in seinen Verbindungen dem Nickel analog verhalten. Nickel besitzt eine unvollendete *M*-Schale mit 16 Elektronen und zwei *4s*-Elektronen, die als normale Valenzelektronen anzusprechen sind, während bei Kupfer die *M*-Schale als abgeschlossen gilt und nur ein *4s*-Elektron vorhanden ist, das in den Cuproverbindungen gebunden wird. Letztere sollten demnach die Normalvalenzstufe des Kupfers darstellen und das Cu_2O sollte wie das NiO schlecht leiten.

1) M. Le Blanc u. H. Sachse, Berichte der Sächs. Akad. der Wissensch., math.-phys. Kl. 82. S. 133 und 153. 1930.

Nach älteren Literaturangaben schien dies zweifelhaft. Eine ganze Anzahl geht dahin, daß sich die Leitfähigkeiten von Cu_2O und CuO nicht wesentlich unterscheiden. Unter diesen Umständen war es nötig, die Elektronenleitfähigkeiten von Cu_2O und CuO zu untersuchen.

Experimentelle Ergebnisse

Das Kupferoxydul wurde aus Fehlingscher Lösung durch Zusatz von Rohrzucker bei $90-100^\circ$ gefällt, filtriert, mit heißem Wasser gründlich ausgewaschen (bis zum Verschwinden der Reaktion auf OH^- und SO_4^{--} im Waschwasser) und bei 105° getrocknet. Nach den Literaturangaben kann man das Trocknen an der Luft vornehmen. Wir sind mit einem Präparat auch so verfahren, haben aber gefunden, daß auf diese Weise ein geringer Gehalt an aktivem Sauerstoff (etwa 0,2 Proz.) entsteht und haben es daher weiterhin vorgezogen, im Vakuum zu trocknen und das Präparat nach Erkalten auf Zimmertemperatur unter Wasserstoff aufzubewahren. Unter diesen Bedingungen war ein Gehalt an aktivem Sauerstoff nicht nachweisbar. Es trat aber noch eine andere Verunreinigung in Erscheinung, die in einem gewissen, offenbar sehr fest adsorbierten Gehalt an organischer Substanz bestand, der sich direkt durch eine Kohlenstoffbestimmung nachweisen ließ. Wir konnten jedoch analytisch zeigen, daß durch die von uns eingeschlagene Vorbehandlung des Kupferoxyduls, einmaliges Erhitzen im Vakuum auf $250-300^\circ$, dieser Kohlenstoffgehalt fast völlig beseitigt wird. Er betrug in einem Falle vor dem Erhitzen 0,3 Proz. und fiel nach kurzer Erhitzungsdauer auf 0,02 Proz., also bis auf einen Wert nahe an der mikroanalytischen Fehlergrenze. Die Farbe dieses Präparats, mit dem wir gearbeitet haben, war hellrot. Das CuO wurde daraus durch Oxydation bei 400° hergestellt.

Unter Ausschuß von organischen Stoffen hergestellte Cu_2O -Präparate (durch Fällung mit Hydrazinsulfat oder Hydroxylamin in alkalischer Lösung) besaßen die gleiche Leitfähigkeit. Wir haben ferner auch das Verhalten von kompaktem Cu_2O (sogenannten Pfundschen Schichten) bei Einwirkung von Sauerstoff sowohl bei 20° , wie auch bei 400° bzw. 600° untersucht. Dabei werden natürlich nicht die gleichen Ab-

solutwerte der Leitfähigkeit gefunden. Qualitativ hat sich aber das gleiche Bild ergeben. Die Oxydation des kompakten Cu_2O geht bei diesen Temperaturen außerordentlich langsam vor sich.

Die Apparatur war die gleiche wie bei den früheren Messungen, nur haben wir uns diesmal auf die Messung der Gleichstromleitfähigkeit beschränkt. Zur Feststellung elektrochemischer Polarisationsspannungen diente wieder ein rotierender, doppelpoliger Umschalter. Die Messungen wurden im Vakuum ausgeführt.

CuO zeigte reine, Cu_2O überwiegende Elektronenleitfähigkeit mit einem sehr geringen Anteil elektrolytischer Leitung.¹⁾ Fig. 1 gibt den Temperaturverlauf der Leitfähigkeiten von Cu_2O und CuO wieder. Die Werte der Tab. 1 sind Mittelwerte aus verschiedenen, befriedigend miteinander übereinstimmenden Meßreihen, in denen der Temperaturverlauf in Intervallen von $5-10^\circ$ verfolgt wurde. — Die Packungsdichte der Pulver betrug $4,2-4,3 \text{ g/cm}^3$ ($= 72 \text{ Proz.}$ der Kristalldichte).

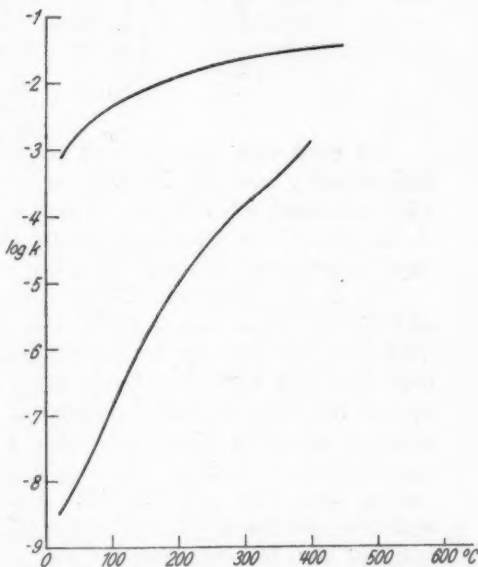


Fig. 1

1) Nach mündlicher Mitteilung von Hrn. Prof. Gudden besteht die Möglichkeit, daß die beobachteten Polarisationsspannungen durch Aufladungserscheinungen vorgetäuscht sind, wie sie in der Arbeit von Mönch (Ann. d. Phys. 1931) beschrieben werden. Sollte dies zutreffen, so läge auch beim Cu_2O reine Elektronenleitung vor. Hierfür sprechen auch die Versuche an kompaktem Cu_2O .

Tabelle 1

Temperatur in ° C	Cu ₂ O	CuO
20	$3 \cdot 10^{-3}$	$6,4 \cdot 10^{-4}$
50	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,98 \cdot 10^{-3}$
100	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$4,70 \cdot 10^{-3}$
150	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$8,10 \cdot 10^{-3}$
200	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$
250	$4,6 \cdot 10^{-5}$	$1,82 \cdot 10^{-3}$
300	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$2,42 \cdot 10^{-3}$
350	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$2,95 \cdot 10^{-3}$
400	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$3,55 \cdot 10^{-3}$
450		$4,07 \cdot 10^{-3}$

Es zeigt sich also bei den Kupferoxyden wie bei den Nickeloxyden, daß die höhere Oxydationsstufe ein besserer Elektronenleiter ist, wobei es in diesem Falle gleichgültig ist, ob ein neues Gitter entsteht (CuO) oder das alte, dem normalen Oxyd zukommende erhalten bleibt (schwarzes Nickeloxyd).

In dem untersuchten Temperaturgebiet geht selbst bei sehr niedrigen Sauerstoffpartialdrucken Cu₂O freiwillig in CuO über, denn bei 500° ist der Gleichgewichtsdruck des Systems Cu₂O–CuO erst 10^{-6} mm. Daher können bereits sehr geringe Spuren von Sauerstoff die Leitfähigkeit des Cu₂O um Zehnerpotenzen erhöhen, wenn man sich im Gebiet genügender Oxydationsgeschwindigkeit befindet, wie es schon bei Temperaturen über 200° der Fall ist. Auf diesen Umstand sind sicherlich die beträchtlichen Unterschiede in den Literaturangaben für die Leitfähigkeit des Kupferoxyduls zurückzuführen.

Gudden und Mönch¹⁾ geben an, daß die spezifische Leitfähigkeit der von ihnen untersuchten künstlichen Kupferoxydulpräparate zwischen $2 \cdot 10^{-3}$ und $2 \cdot 10^{-5}$ rez. Ohm, je nach dem Sauerstoffgehalt, schwanke. Außerdem soll nach O. v. Auwers²⁾ der Entgasungsgrad im allgemeinen, nicht nur in bezug auf Sauerstoff, die Leitfähigkeit des Cu₂O erheblich beeinflussen. W. Vogt³⁾ hat im Temperaturgebiet von –70° bis +70° genaue Leitfähigkeitsmessungen an kompaktem

1) B. Gudden u. G. Mönch, Naturw. 19. S. 361. 1931.

2) O. v. Auwers, ebenda 19. S. 133. 1931.

3) W. Vogt, Ann. d. Phys. 7. S. 283–204. 1931.

Cu_2O ausgeführt, das nach unseren Erfahrungen einen sehr geringen Gehalt an akt. Sauerstoff gehabt haben dürfte. (Wir fanden in einem auf gleiche Weise dargestellten Präparat 0,6 At.-%/100.) Da wir die Leitfähigkeit des Kupferoxyduls seiner Oxydierbarkeit wegen im Vakuum maßen, konnten wir bei gelegentlichem Gaseinlaß ebenfalls derartige Beobachtungen machen, die allerdings anderer Art waren wie die v. Auwers mitgeteilten. Ohne die anderen von den genannten Autoren angeschnittenen Fragen bezüglich des mechanischen und optischen Verhaltens erörtern zu wollen, teilen wir hier nur noch unsere Beobachtungen über den Einfluß von Gasen auf die Gleichstromleitfähigkeit des Cu_2O mit.

Während das ursprüngliche Cu_2O , das als Ausgangsmaterial verwendet wurde, bei Zimmertemperatur an der Luft keine zeitlichen Veränderungen der Leitfähigkeit zeigte, war nach einmaligem Erhitzen auf 250 bis 300° im Vakuum oder in Stickstoff eine Aktivierung des Kupferoxyduls, d. h. eine hochgradige Empfindlichkeit gegenüber

dem Luftsauerstoff eingetreten, die offenbar auf die obenerwähnte Abgabe flüchtiger organischer Stoffe zurückzuführen war. Ließ man nämlich jetzt bei 20° getrocknete Luft oder Sauerstoff einwirken, so stieg die Leitfähigkeit um 3 Zehnerpotenzen (von 10^{-9} auf 10^{-6}). Fig. 2, Kurve 1. Die aufgenommene Sauerstoffmenge war kleiner als 1 Promille. Ersetzte man die Luft wieder durch Stickstoff¹⁾ und erhitzte von neuem, so fand man den aus

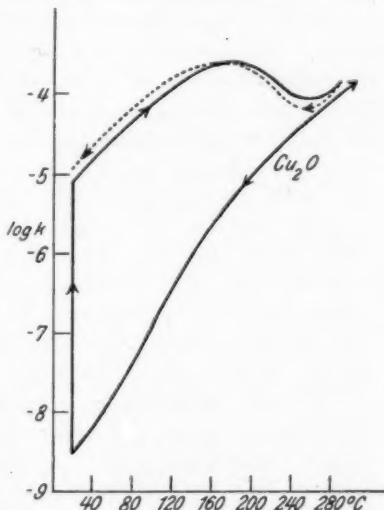


Fig. 2

1) Der Stickstoff war zur Befreiung von Sauerstoff vorher über glühendes Kupfer geleitet worden.

Kurve 2 ersichtlichen, ganz neuartigen Temperaturverlauf. Die Leitfähigkeit stieg bis 160° , als ob ein Gemisch von Cu_2O und CuO vorläge, sank aber dann wieder und ging durch ein gut reproduzierbares Minimum bei 250° sehr angenähert wieder in die Leitfähigkeitskurve des ursprünglichen Cu_2O über.¹⁾ Ließ man die Temperatur sinken, so wurde die Kurve mit dem Minimum rückläufig wieder erhalten (gestrichelte Kurve in Fig. 2).

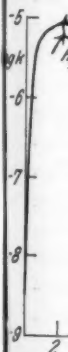
Dieses Verhalten legt den Schluß nahe, daß die Einwirkung des Sauerstoffs bei 20° ein bei Temperaturerhöhung reversibler Vorgang ist und nicht dem Übergang Cu_2O — CuO entspricht, der unter diesen Umständen natürlich irreversibel sein müßte. Hierauf deutet auch die Beobachtung, daß die Leitfähigkeitssteigerung bei Zimmertemperatur von keiner merklichen Farbänderung begleitet ist. Für die Auffassung, daß die genannte Leitfähigkeitszunahme nicht durch Bildung von CuO hervorgerufen ist, spricht weiterhin die Tatsache, daß man nach Abpumpen bei 220 — 260° rückläufig wieder vollkommen die Kurve des reinen Cu_2O bis zur Zimmertemperatur hinab erhält und auf diese Weise das Kupferoxydul nach jeder Gasaufnahme beliebig oft regenerieren kann. Ein Abpumpen chemisch gebundenen Sauerstoffs wäre unmöglich, da der Dissoziationsdruck des Systems $2\text{CuO} \rightleftharpoons \text{Cu}_2\text{O} + \frac{1}{2}\text{O}_2$ bei 250° kleiner als 10^{-8} mm ist.

Die hier beschriebenen Erscheinungen unterscheiden sich offensichtlich von den durch O. v. Auwers mitgeteilten Effekten. Er gibt nur an, daß sein Cu_2O , dessen Vorgeschichte uns unbekannt ist, durch Zugabe von Gasen Leitfähigkeitsänderungen von mehreren hundert Prozenten erfährt, während der von uns erhaltene Effekt 3 Zehnerpotenzen ausmacht und nur durch nachfolgendes Erhitzen im Vakuum auf 250° rückgängig zu machen ist.

Über das Verhalten des Kupferoxyduls von der Leitfähigkeit 10^{-6} bei 20° haben wir weiterhin folgende Beobachtungen gemacht:

1. Beim Evakuieren auf $\frac{1}{1000}$ mm sinkt die Leitfähigkeit um ein Drittel (von $8,7 \cdot 10^{-6}$ auf $5,0 \cdot 10^{-6}$).

¹⁾ Die Lage des vorangehenden Maximums ist abhängig vom Gasdruck.



Sau
der
pro
Cu
Wa
ist
wie
100
unt
Uns
dru

2. Darauf folgende Zugabe von reinem Wasserstoff bewirkt eine weitere Abnahme auf ein Viertel des vorgenannten Wertes (von $6,1 \cdot 10^{-6}$ auf $1,5 \cdot 10^{-6}$). Der Abfall vollzieht sich sehr langsam (in 16 Stunden bis zum Endwert). Durch Abpumpen des Wasserstoffs steigt die Leitfähigkeit wieder bis nahezu auf den Vakuumwert. Fig. 3 zeigt die zeitliche Einstellung der Leitfähigkeitsänderungen bei 20° . Zum Vergleich ist der Anstieg der Leitfähigkeit von 10^{-9} bis 10^{-6} mit eingetragen.

Zum Schluß wollen wir noch kurz über Beobachtungen berichten, die die isothermen Leitfähigkeitsänderungen beim Übergang $\text{Cu}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CuO}$ betreffen.

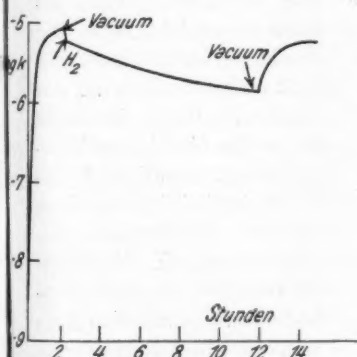


Fig. 3

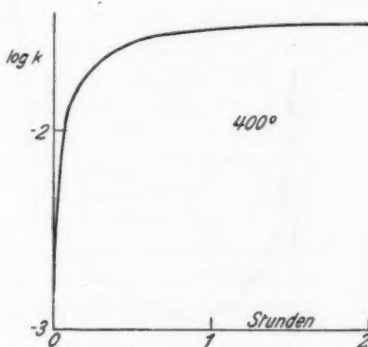


Fig. 4

Zu eingespannten Cu_2O -Preßkörpern wurde bei 400° Sauerstoff von $\frac{1}{5}$ Atm. Druck gegeben. Der zeitliche Verlauf der Leitfähigkeitszunahme ist in Fig. 4 dargestellt. Das Endprodukt der Sauerstoffeinwirkung hat die Zusammensetzung CuO . Andererseits wurde ein Preßkörper von CuO mit Wasserstoff behandelt. Nach den rein chemischen Erfahrungen ist es bisher nicht gelungen, als Endprodukt der Reduktion wieder Kupferoxydul zu erhalten. Bei Temperaturen über 100° soll die Reduktion stets bis zum Kupfer führen, während unter 100° C die Reduktionsgeschwindigkeit zu gering ist. Unser Reduktionsversuch mit Wasserstoff von Atmosphärendruck wurde bei 160° angestellt, wo eine ausreichende Reak-

tionsgeschwindigkeit zu erwarten war. Es wurde dabei folgendes beobachtet: Die Leitfähigkeit sank anfangs, als ob die Bildung von Cu_2O vor sich ginge, ging durch ein Minimum, das um eine Zehnerpotenz über der Leitfähigkeit des reinen Cu_2O bei der gleichen Temperatur lag und stieg kurz darauf sehr rasch auf den Wert des metallischen Kupfers der gleichen mechanischen Beschaffenheit. Der zeitliche Verlauf dieser

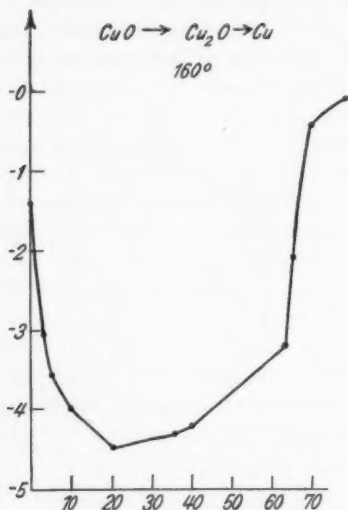


Fig. 5

Rahmen unseres Programms herausfallen. Von experimenteller Bedeutung war noch die Tatsache, daß es gelang, durch eine ähnliche Wasserstoffbehandlung die Leitfähigkeit des Cu_2O , das analytisch kaum noch faßbare Spuren von akt. Sauerstoff enthielt, wesentlich (etwa um eine Zehnerpotenz) herabzudrücken. Bei weiterer Einwirkung des Wasserstoffs stieg die Leitfähigkeit wieder (Bildung von Kupfer). Auf diese Weise kamen wir auch beim kompakten Cu_2O zu niedrigeren Werten, als sie Vogt¹⁾ gefunden hatte.

1) A. a. O.

isothermen Leitfähigkeitsänderungen ist in Fig. 5 wiedergegeben. Diese Ergebnisse legen den Gedanken nahe, daß Cu_2O als Zwischenprodukt bei der Reduktion tatsächlich auftritt und ermutigen zu der Fortsetzung der Versuche bei etwas niedrigeren Temperaturen. Es sei noch bemerkt, daß bei einem zweiten, bei 80° begonnenen Reduktionsversuch innerhalb 48 Stunden eine Leitfähigkeitsabnahme um eine Zehnerpotenz beobachtet wurde. Der Endzustand wurde nicht abgewartet. Die Versuche wurden von uns nicht fortgeführt, da sie aus dem

fähig
Pre
gem
bei
zieh
schl
Oxy
dur
eine
Leit

20°
sich
10-
zurü
auf
oder
nan
brac
Leit
acht
Über

Zusammenfassung

1. Es wurde der Temperaturverlauf der spezifischen Leitfähigkeiten von Cu_2O und CuO zwischen 20 und 400° an Preßkörpern vergleichbarer Packungsdichte und Teilchengröße gemessen. Die Leitfähigkeit von Cu_2O liegt bei 20° um 5, bei 400° um $1\frac{1}{2}$ Zehnerpotenzen unter der des CuO . Wir ziehen daraus den Schluß, daß Cu_2O in Analogie zu den schlechtleitenden Monoxyden NiO und MnO als normales Oxyd des Kupfers anzusprechen ist. Die Bildung von CuO durch Aufnahme von Sauerstoff führt zur Beanspruchung eines Elektrons der inneren Schale und zur Abgabe von Leitungselektronen.

2. Läßt man zu frisch hergestelltem Cu_2O , das sich bei 20°C im Vakuum befindet, Sauerstoff hinzutreten, so stellt sich eine Leitfähigkeitssteigerung um 3 Zehnerpotenzen auf 10^{-6} ein, die beim Abpumpen des Gases nicht wesentlich zurückgeht, sondern nur durch einmaliges Erhitzen im Vakuum auf 250° rückgängig gemacht werden kann. Mit Wasserstoff oder Stickstoff tritt der Effekt nicht auf. Werden die genannten Gase zu dem Cu_2O von der Leitfähigkeit 10^{-6} gebracht, so ist eine verhältnismäßig geringe Beeinflussung der Leitfähigkeit zu beobachten. Den Schluß bilden einige Beobachtungen über die isothermen Leitfähigkeitsänderungen beim Übergang $\text{Cu}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CuO}$.

Leipzig, Physikalisch-Chemisches Institut der Universität.

(Eingegangen 25. Juli 1931)

Berichtigung Von M. Wien

In meinen Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn Arkadiew¹⁾ habe ich die Frage kurz besprochen, ob der Unterschied zwischen μ_r und μ_k auf Hysterese beruhen könnte, und bin dabei versehentlich von der Annahme ausgegangen, daß bei schwachen Feldern Hysterese nach Rayleigh erst dann auftritt, wenn μ mit dem Felde \mathfrak{H} nicht nur linear ansteigt, sondern die Kurve sich krümmt. Dies gilt für \mathfrak{B} , während bei μ schon das lineare Ansteigen mit \mathfrak{H} ein Zeichen beginnender Hysterese ist. Auf meinen Schluß, daß die Hysterese bei dem Michelschen Versuch nach der Rayleighschen Theorie nur sehr klein gewesen sein kann, wenn man der Berechnung die Ergebnisse von Strutt zugrunde legt, ist dies ohne Einfluß, denn die durch Hysterese bewirkte Differenz zwischen μ_k und μ_n berechnet sich danach für die Bedingungen, unter denen Michels arbeitete, zu etwa 1 Proz., während die Versuche selbst 30—50 Proz. Unterschied ergeben. Hr. Kollege Busch macht mich darauf aufmerksam, daß nach den Versuchen von Jordan²⁾ der Verlustwinkel durch Hysterese nicht, wie die Rayleighsche Theorie es fordert, mit \mathfrak{H} nach Null konvergiert, sondern ein ziemlich großer Verlustwinkel auch bei beliebig schwachen Feldern übrig bleibt, d. h. daß es keine reversible Magnetisierung gibt. Damit wäre natürlich auch bei den sehr schwachen Feldern der Michelschen Versuche noch eine größere Differenz zwischen μ_k und μ_n durch Hysterese erklärlich. Zur Entscheidung dieser Frage müßten an demselben Draht Versuche bei statischer Magnetisierung und bei Wechselfeldern von sehr niedriger bis zu sehr hoher Frequenz gemacht werden; derartige vergleichende Versuche fehlen jedoch bisher.

1) W. Arkadiew, Ann. d. Phys. [5] 11. S. 406. 1931.

2) H. Jordan, ENT. 1. S. 27. 1924.

Jena, Physik. Institut der Universität, 5. Oktober 1931.

(Eingegangen 6. Oktober 1931)

Die Ionisation von Edelgasen durch langsame Alkaliionen

Teil II: Krypton und Xenon

Von Otto Beeck und J. Carlisle Mouzon¹⁾

(Mit 3 Figuren)

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung der von dem einen von uns in dieser Zeitschrift veröffentlichten Untersuchung über die Ionisation von Helium, Neon und Argon durch langsame Alkaliionen²⁾ [im folgenden als (I) zitiert]. Das Hauptresultat jener Arbeit lautete: Ein Edelgasatom wird von dem Alkaliion am leichtesten ionisiert, das die gleiche Elektronenzahl in der Hülle hat wie das Edelgasatom, also Neon durch Na^+ und Argon durch K^+ . Dieses Resultat konnte später von Sutton und Mouzon³⁾ mit ihrer bereits in (I) erwähnten, weniger reinen und weniger empfindlichen Methode bestätigt werden.

Die Versuche mit Xenon wurden von dem einen von uns bereits kurz vor seiner Abreise nach Pasadena begonnen mit dem qualitativen Resultat, daß Xenon am besten von Cs^+ ionisiert wird.

Methode und Anordnung

Da die in (I) beschriebene Apparatur unverändert verwendet wurde, verweisen wir in allen Einzelheiten auf jene Arbeit. Zu bemerken ist, daß bei der Untersuchung von Xeon zum Ausfrieren des Quecksilberdampfes und der Fettdämpfe eine Kohlensäureschnee-Äthermischung statt flüssiger Luft verwendet wurde. Da, wie früher, in strömendem Gas

1) Vgl. die kurze Zusammenfassung, Phys. Rev. **38**. S. 5. 1931.

2) Fortsetzung von: Otto Beeck, Ann. d. Phys. [5] **6**. S. 1001. 1930.

3) R. M. Sutton u. J. C. Mouzon, Phys. Rev. **37**. S. 379. 1931.

gearbeitet wurde, erlaubten es die beschränkten Mengen Krypton und

Xenon nicht, mehr Meßpunkte zu messen, als unbedingt nötig schien.

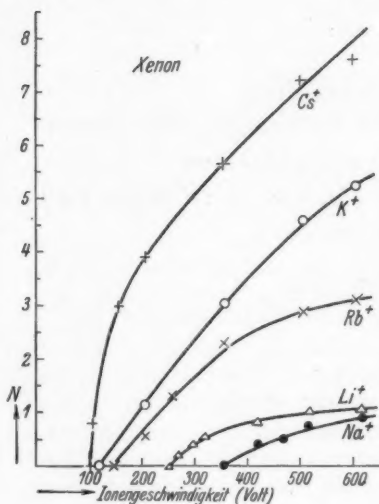


Fig. 1

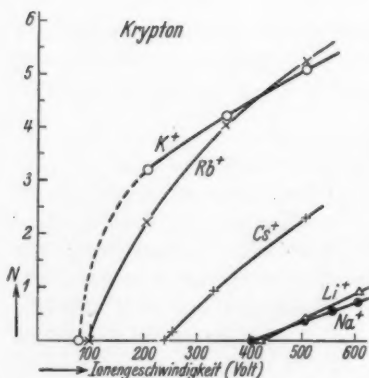


Fig. 2

Meßergebnisse

Xenon

Fig. 1 zeigt die Meßergebnisse für alle fünf Alkaliionen in Xenon. Als Ordinate ist N (d. h. die Anzahl der pro Ion auf dem Wege von 1 cm beim Druck von 1 mm Hg und 0°C gebildeten Elektronen) und als Abszisse die Ionengeschwindigkeit aufgetragen. In Übereinstimmung mit den Resultaten in Helium, Neon und Argon ionisiert in Xenon Cs^+ am besten, während die Resultate, daß K^+ Xenon besser ionisiert als Rb^+ , und Li^+ besser als Na^+ , unerwartet sind. Die Punkte, bei denen die Ionisation einsetzt, sind der dieser Arbeit folgenden, besonderen Untersuchung über die Ionisationspotentiale entnommen.

Krypton

Fig. 2 zeigt die Meßergebnisse für alle fünf Alkaliionen in Krypton. Wenngleich bei 500 Volt

Ionengeschwindigkeit die Ionisation durch Rb^+ die größte Ausbeute aufweist, was den Resultaten in den anderen Gasen entspricht, so ist die nahezu gleiche Ausbeute durch K^+ und der Verlauf der K^+ -Kurve bei kleineren Geschwindigkeiten bemerkenswert. Die K^+ -Kurve setzt nämlich früher und steiler ein als die Rb^+ -Kurve, um jedoch bei 200 Volt flacher als die Rb^+ -Kurve zu werden. Sie schneidet dann die Rb^+ -Kurve bei etwa 400 Volt.¹⁾ Die Einsatzpotentiale sind wiederum der dieser Arbeit folgenden, selbständigen Veröffentlichung entnommen.

Gesamtergebnis

In Fig. 3 sind in der bereits in (I) verwendeten, geeigneten Darstellung die Ergebnisse mit allen fünf Alkaliionen

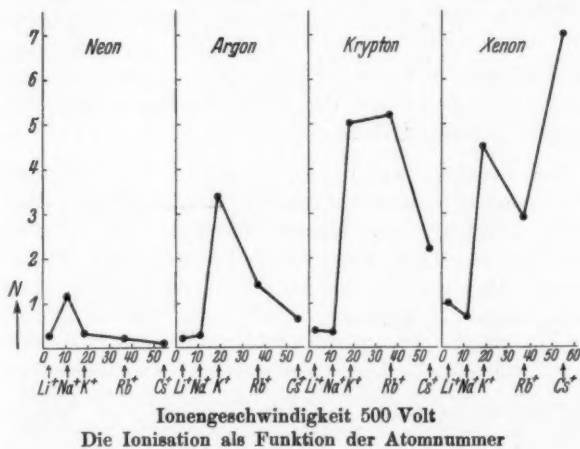


Fig. 3

in den Edelgasen Neon, Argon, Krypton und Xenon zusammengestellt, und zwar für die Ionengeschwindigkeit 500 Volt. Als Ordinate ist N aufgetragen und als Abszisse die Atomnummer der verwendeten Alkaliionen. Die Meßpunkte gleicher Alkaliionenenergien sind schematisch verbunden.

1) Auf mehrfache Reproduktion und Sicherstellung dieses Kurvenverlaufs ist besonderer Wert gelegt worden.

Es ergeben sich folgende Gesamtresultate:

a) Ein Edelgasatom wird von dem Alkaliion am leichtesten ionisiert, das dem Edelgasatom am nächsten im Periodischen System steht, also nahezu die gleiche Masse hat und die gleiche Elektronenzahl in der Hülle wie das Edelgasatom. Eine Ausnahme macht das Krypton, das unterhalb etwa 400 Volt stärker von K^+ als von Rb^+ ionisiert wird.

b) Die jeweilige maximale Ausbeute der Ionisation in einem Edelgas durch das ihm im Periodischen System nächststehende Alkaliion ist um so größer, je schwerer das Edelgasatom ist.

Die hohe Ionisationsausbeute von K^+ in Krypton im Vergleich mit der Ausbeute von Rb^+ , und die Tatsache, daß K^+ in Xenon besser ionisiert als Rb^+ , und Li^+ besser als Na^+ , komplizieren zwar das Gesamtergebnis beträchtlich, befestigen jedoch möglicherweise die schon in der Formulierung des Gesamtresultats in (I) enthaltene Ansicht, daß die Maximalbildung mehr eine Frage der Elektronenkonfiguration ist als ein reiner Masseneffekt.

Hrn. Prof. Millikan danken wir für sein Interesse an dieser Arbeit. Hr. Prof. Ramsauer dankt besonders der eine von uns¹⁾ für sein weiteres Interesse an dieser Untersuchung und der Linde A.-G., Abt. Luftverflüssigung, Höllriegelskreuth bei München, für die freundliche Überlassung der Edelgase Krypton und Xenon.

1) O. Beeck, a. a. O.

Pasadena (Calif.), California Institut of Technology,
Juli 1931.

(Eingegangen 25. August 1931)

sche
schw
nach
ersch
gena

gegel

Gesc
ergib
länge
Raum
ist f
entsp
Win
Der
für
blen
Kath
sorge
keit
Stör
zu v
wirk
Krist
über

Elektroneninterferenzen im Kristallgitter

Von Fritz Kirchner

(Mit 11 Figuren, darunter 2 Tafeln)

I. Experimentiertechnik

Bezeichnet man in üblicher Weise mit h das Plancksche Wirkungsquantum, mit m und v die Masse und die Geschwindigkeit von bewegten Korpuskeln, so ist bekanntlich nach der Wellenmechanik diesen Korpuskeln eine Wellenerscheinung zuzuordnen, deren Wellenlänge λ durch die sogenannte de Brogliesche Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

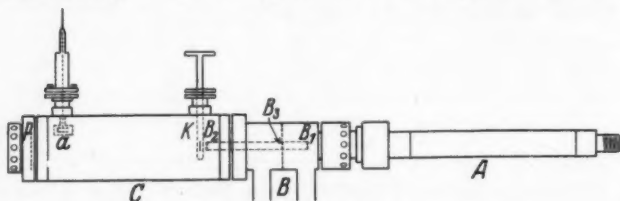
gegeben ist.

Für Kathodenstrahlteilchen ($m_0 = 9,02 \cdot 10^{-28}$ g), die eine Geschwindigkeit von der Größenordnung 10^{10} cm/sec besitzen, ergibt sich demnach mit $h = 6,55 \cdot 10^{27}$ Erg/sec eine Wellenlänge von weniger als 10^{-9} cm. Der Abstand der Atome im Raumgitter der Kristalle, dem feinsten Gitter, das wir kennen, ist fast um 2 Zehnerpotenzen größer; infolgedessen sind die entsprechenden Interferenzerscheinungen auf einen sehr kleinen Winkelbereich rings um die Primärstrahlrichtung beschränkt. Der wichtigste Punkt in technischer Beziehung ist deshalb für Interferenzuntersuchungen eine möglichst scharfe Ausblendung des Kathodenstrahles. Um mit „monochromatischer“ Kathodenstrahlung arbeiten zu können, muß man ferner dafür sorgen, daß nur Kathodenstrahlen von einheitlicher Geschwindigkeit zur Interferenzwirkung gelangen. Und um schließlich Störungen durch Vielfachstreuung und Geschwindigkeitsverluste zu vermeiden, muß man Vorsorge treffen, daß die Interferenzwirkung nur innerhalb einer extrem geringen Schichtdicke des Kristallpräparats stattfindet. Die vorliegende erste Mitteilung über die im hiesigen Institut durchgeführten systematischen

Interferenzuntersuchungen soll zunächst zeigen, in welcher Weise die genannten technischen Forderungen sich am zuverlässigsten und zugleich am einfachsten realisieren lassen¹⁾; im Anschluß daran sollen noch einige allgemeinere Fragen, z. B. nach dem Auflösungsvermögen einer solchen Interferenzapparatur, besprochen werden, über die in der Literatur zum Teil eine merkwürdige Unklarheit herrscht.

Die Versuchsanordnung

Die zu beschreibende Apparatur (Fig. 1, Taf. 1) ist einem möglichst vielseitigen Verwendungszweck angepaßt; sie ist sowohl zu photographischen Strukturuntersuchungen und Leuchtschirmbeobachtungen, wie auch für elektrometrische Intensitätsmessungen und verschiedene andere speziellere Zwecke



Schematische Zeichnung der Versuchsanordnung

A: Entladungsröhre mit Glühkathode

B: Blendenkörper: B_1 und B_2 : enge Lochblenden
 B_3 : weite Lochblende

C: Interferenzrohr:

K: Drehbarer Kristallträger

a: Verschiebbarer Auffänger für elektrometrische Messungen

P: Photographische Platte und Leuchtschirm

Fig. 2

benutzt worden. Sie besteht aus drei miteinander verschraubten und durch Blei bzw. Gummi abgedichteten Hauptteilen: der Entladungsröhre (Fig. 2 A), dem Blendenkörper (2 B) und dem Beobachtungsraum (2 C) (vgl. auch Fig. 1, Taf. 1). Die Entladungsröhre enthält eine Wolframglühkathode mit Rundfokus oder

1) Eine vollständige Zusammenstellung der bisherigen Untersuchungen über Elektroneninterferenzen ist kürzlich von H. Mark u. R. Wierl (Fortschr. d. Chem., Phys. u. phys. Chem. 21. Heft 4. 1931) gegeben worden.

auch Strichfokus, wie sie für Metallröntgenröhren verwendet wird; an Stelle der Glühkathode läßt sich aber auch eine normale Entladungsröhre mit Aluminiumkathode aufsetzen. Welche Entladungsart man am zweckmäßigsten verwendet, hängt im wesentlichen davon ab, welche Hochspannungsquelle für den Betrieb der Röhre zur Verfügung steht. Bei Verwendung einer normalen Röntgenanlage mit Heiztransformator, Gleichrichtern und Kondensatoren ist der Glühkathodenbetrieb wegen seiner aus der Röntgentechnik bekannten Vorzüge der bequemeren und zuverlässigeren Betriebsbedingungen entschieden vorzuziehen; auch der scheinbare Nachteil der etwas geringeren Strahlausbeute infolge der größeren Divergenz der Glühkathodenstrahlen¹⁾ kann unbedenklich in Kauf genommen werden, da es ja bei photographischen Strukturaufnahmen aus verschiedenen Gründen sogar vorteilhaft ist, mit Strahlen von geringer Intensität zu arbeiten. Das, was der Glühkathode auch hier die Überlegenheit über die Gaskathode sichert, ist die Tatsache, daß sich jede gewünschte Röhrenspannung und jede Strahlintensität unabhängig voneinander durch einfache Handgriffe am Schalttisch jederzeit einstellen lassen, während in der Gasentladung Spannung und Stromstärke durch den jeweils einregulierten Gasdruck mit beeinflußt werden. (Beim Betrieb mit der Influenzmaschine dagegen ist, wie früher schon bemerkt wurde, die Gasentladung vorzuziehen, vgl. auch S. 746.) Das Licht des glühenden Wolframdrahts stört bei der hier verwendeten scharfen Ausblendung des Strahls selbst bei Verwendung von hohen Belichtungszeiten (etwa 10 Min.) überhaupt nicht.

Der Blendenkörper besteht aus einem massiven Vierkantstück aus Messing, das in der Längsrichtung weit ausgebohrt ist. In die Ausbohrung werden von beiden Seiten die Blenden-träger eingeschraubt; die Blenden sind infolgedessen leicht auswechselbar. Die Lochblenden B_1 und B_2 , die zur Ausblendung des Kathodenstrahls dienen, haben einen gegenseitigen Abstand von 15 cm; ihr Durchmesser ist normalerweise 0,1—0,2 mm, kann aber für spezielle Zwecke auch auf 0,05 mm gebracht werden, so daß die Öffnung des zur Interferenzwirkung gelangenden Strahlenbündels nur etwa 1 Bogen-

1) Vgl. Phys. Ztschr. 31. S. 773. 1930.

minute beträgt. Die dritte, weite Blende B_3 (etwa 0,5–1 mm Durchmesser) verhindert, daß störendes Glühfadenlicht durch Reflexion an den Innenwänden der Ausbohrung zwischen B_1 und B_3 in den Beobachtungsraum gelangt.¹⁾ Das die Blenden enthaltende Messingstück, das auf ein Stativ fest aufgeschraubt ist, trägt außerdem noch je einen Pumpansatz mit kurzem Tombakschlauch zur Evakuierung von Entladungsraum und Beobachtungsraum; diese Anordnung hat den Vorteil, daß die letzteren beiden Teile jederzeit leicht abgeschraubt bzw. ausgewechselt werden können, ohne daß an den Vakuumleitungen etwas geändert zu werden braucht. Die Evakuierung der beiden Räume geschieht getrennt durch je eine zweistufige Gaede-sche Stahlpumpe, um die Erreichung von möglichst hohen Entladungsspannungen zu sichern; wenn man sich aber mit mittleren Spannungen (etwa 30 kV) begnügt, genügt zur Evakuierung beider Räume auch eine einzelne Stahlpumpe.

Der Beobachtungsraum besteht aus einem 28 cm langen Messingrohr mit rechteckigem Querschnitt (10×8 cm) und 1 cm Wandstärke, das an dem einen Ende mittels Gummichtung auf das Blendenstück aufgeschraubt ist. Das Blendenrohr ragt etwa 2 cm in den Beobachtungsraum hinein. Unmittelbar hinter der Objektblende B_2 befindet sich der Kristallträger K (vgl. Fig. 2 C), der durch eine seitliche Ausbohrung des rechteckigen Messingrohres eingeführt wird. Er besteht aus einem 15 cm langen, mit Gummi gedichteten Messingstift von 0,7 cm Durchmesser, der während des Betriebes um seine Längsachse gedreht und außerdem längs dieser Achse beliebig verschoben werden kann. Dadurch wird erreicht, daß das zu untersuchende Kristallpräparat in verschiedenen Richtungen²⁾ und an verschiedenen Stellen durchstrahlt, bzw. daß eine ganze

1) Wenn die Blende B_3 weggelassen wird, stört zwar nach meinen Erfahrungen das reflektierte Licht auch erst bei längeren Belichtungszeiten; es ist aber wohl möglich, daß bei Verwendung eines engen Blendkanals mit spiegelnden Wänden (an Stelle des hier benutzten Lochblendensystems) die Störung durch reflektiertes Glühfadenlicht beträchtlich größer ist.

2) Die Durchstrahlung in verschiedenen Richtungen ist auch bei Untersuchungen an Kristallpulvern notwendig, da Kristallpulver in sehr dünnen Schichten sehr häufig eine Faserstruktur, d. h. eine geregelte Richtungsverteilung der Kristallite, zeigen.

Reihe von Kristallpräparaten unmittelbar hintereinander untersucht werden kann.

Einige Zentimeter von dem Kristallträger ist ein kleiner elektrischer Verdampfungssofen aus Sillimantit mit einer einlagigen Wicklung von Wolframdraht angebracht; die Öffnung des Ofens ist auf den durchstrahlten Teil des Kristallträgers gerichtet.

Der hintere Teil des als Beobachtungsraum dienenden Messingrohrs ist durch einen aufgeschraubten^o Deckel aus Messing abgeschlossen, der sowohl den für visuelle Beobachtungen dienenden Fluoreszenzschirm mit Zinkblende, als auch eine Vorrichtung zum Einlegen der 6×7 cm großen photographischen Platte enthält. Wegen des verwendeten Plattenmaterials vgl. S. 746.

Schließlich ist noch ein verschiebbarer Auffänger (*a*) für elektrometrische bzw. ionometrische Intensitätsmessungen von oben her in das hintere Ende des Beobachtungsraumes eingeführt. Der Auffänger kann mittels einer mit Hundertstel-Millimeterteilung versehenen Schraube in senkrechter Richtung durch das Interferenzsystem hindurchgeschoben werden; zu einer eventuell notwendigen horizontalen Ablenkung des Interferenzbildes wird ein senkrecht verlaufendes Magnetfeld einer Spule benutzt.

Die ganze Anordnung ist auf ein eisernes Gestell mit vier weiten Röhren montiert; die Röhren dienen gleichzeitig als Vorkuum für die Stahlpumpen (vgl. Fig. 1, Taf. 1).

Für den Betrieb der Entladungsröhre wurde eine Hochspannungsanlage, bestehend aus Umformer, Transformator, Gleichrichter und Kondensatoren, verwendet. Röhrenstrom und Spannung konnten am Schalttische in weiten Grenzen bequem variiert werden. Um die Spannungsschwankungen niedrig zu halten, wurde stets mit geringen Stromstärken (< 1 mA!) gearbeitet; eine Röhrenstromstärke von einem Zehntel mA genügt einerseits vollkommen zur visuellen Beobachtung der Interferenzen auf dem Leuchtschirm, andererseits erfordert sie bei photographischen Strukturaufnahmen auch nur Belichtungszeiten von etwa 10–20 sec (Belichtungszeiten von dieser Größenordnung lassen sich noch bequem messen und reproduzieren, während kürzere Belichtungszeiten beson-

dere Vorrichtungen hierfür erfordern!). Die Fluktuation der Röhrenspannung betrug pro Zehntel Milliampere Belastung etwa 50 Volt; da meist mit einer Spannung von 50000 Volt gearbeitet wurde, entspricht dieser Fluktuation eine Änderung der de Brogliewellenlänge um $\frac{1}{2}$ Promille.

Als Plattenmaterial bei photographischen Aufnahmen fanden meist photomechanische Platten (6×7 cm) mit feinem Korn und dünner Gelatineschicht Verwendung; die empfindliche Schicht dieser Platten wird wegen der relativ geringen Eindringtiefe der Kathodenstrahlen erst bei höheren Röhrenspannungen voll ausgenutzt.¹⁾

Für die elektrometrischen Messungen wurde ein Einfaden-elektrometer (Lutz-Edelmann) benutzt, das samt der Zuleitung vom Auffänger und der Anodenbatterien für die Hilfsspannung vollständig elektrostatisch geschützt in einen geerdeten Metallkasten, bzw. in geerdete Metallröhren, eingebaut war. Die Aufladungszeiten des Elektrometerfadens wurden mit der Stoppuhr gemessen.

Als Ergänzung zu der Beschreibung der für quantitative Messungen benutzten Interferenzapparatur sei noch darauf hingewiesen, daß man für Demonstrationszwecke mit einer wesentlich einfacheren Anordnung auskommt. Man benutzt dann zweckmäßig eine gewöhnliche Ionenentladung und kann sich bei Verwendung von hohen Spannungen (Influenzmaschine oder Induktor!) zur Ausblendung des Strahls mit einer einzigen Lochblende begnügen. Für die Evakuierung genügt in diesem Falle auch eine einzige Saugleitung.²⁾

Die Grenzen der brauchbaren Schichtdicken und die Herstellung der Kristallpräparate

Wie in der Einleitung schon erwähnt, muß man, um Störungen durch Vielfachstreuung und Geschwindigkeitsverluste zu vermeiden, dafür Sorge tragen, daß die Interferenzwirkung

1) Die Verwendung von dick mit Gelatine begossenen Röntgenplatten wäre unzweckmäßig, weil die hier benutzten Kathodenstrahlen ja im günstigsten Falle nur wenige Hundertstel Millimeter in die Gelatineschicht einzudringen vermögen.

2) Eine nähere Beschreibung dieses vereinfachten Demonstrationsapparats habe ich vor einiger Zeit in der Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht 24. S. 111. 1931 gegeben.

nur innerhalb einer extrem geringen Schichtdicke des Kristallpräparats stattfindet. Bei der Reflexion von schnellen Kathodenstrahlen an der Oberfläche eines massiven Einkristalls (entsprechend der Bragg'schen Anordnung bei Röntgeninterferenzen) ist dies naturgemäß überhaupt nicht der Fall, und bei der Reflexion an der Oberfläche eines polykristallinen Präparats auch nur dann, wenn sich diese Oberfläche in einem ganz speziellen Zustand der Auflockerung befindet.¹⁾ Befindet sich die Oberfläche nicht in diesem speziellen Zustand, so erhält man in Reflexionsstellung mit schnellen Kathodenstrahlen am polykristallinen Material überhaupt keine Interferenzen und an Einkristallen günstigstenfalls eine Überlagerung der Interferenzerscheinung der Primärstrahlung mit derjenigen der im Kristall diffus zerstreuten Strahlung. Eine einwandfreie Untersuchung der primären Interferenzerscheinung, die unabhängig von speziellen Oberflächenbedingungen sein soll, ist also nur möglich, wenn das Kristallpräparat eine sehr geringe Dicke besitzt. Die untere Grenze für diese Dicke liegt so niedrig, wie sie technisch überhaupt erreichbar ist; wegen des starken Zerstreuungsvermögens der Atome für Elektronenwellen erhält man auch bei Schichtdicken von der Größenordnung 10^{-7} cm noch genügend hohe Interferenzintensitäten. Als Beispiel hierfür möge das Interferenzdiagramm einer $2 \cdot 10^{-7}$ cm dicken Kollodiumhaut dienen, das in Fig. 3, Taf. 1 reproduziert ist.

Die obere Grenze liegt für Röhrenspannungen von 30 bis 50 kV bei einer Schichtdicke von der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-4} cm. Bei den größten Schichtdicken, die man mit Einkristallen erreichen kann, ist aber das primäre Interferenzpunktsystem schon vollkommen verschwunden; selbst bei einer Röhrenspannung von 60 kV ist bereits bei einer Kristalldicke von $7,3 \cdot 10^{-5}$ cm nur noch ein System von schwarzen und weißen Linien und Bändern zu erhalten²⁾, das durch Reflexion der diffus zerstreuten Strahlung an den Netzebenen des Kri-

1) Vgl. hierzu G. P. Thomson, *Wave Mechanics of Free Electrons*, p. 158.

2) Dieser Befund steht in Widerspruch mit Angaben von E. Rupp (*Naturwissensch.* 1929, S. 875), nach denen sogar bei Dicken von 10^{-3} cm noch ein „Flächengitterspektrum“ auftreten soll.

stalls entstanden ist (vgl. Fig. 4, Taf. 1; eine eingehendere Diskussion der Aufnahme wird bei anderer Gelegenheit gegeben werden).

Am leichtesten lassen sich Schichten von der erforderlichen geringen Dicke mit Zelluloid bzw. Kollodium und mit Glimmer herstellen. Um z. B. sehr dünne Zelluloidhäutchen herzustellen, deren Dicke wenigstens der Größenordnung nach bekannt ist, kann man folgendermaßen verfahren: man stellt sich zunächst eine konzentriertere „Normallösung“ von Zelluloid in Amylacetat her. Bringt man von dieser Lösung einen Tropfen auf eine Wasser- oder Quecksilberoberfläche, so bleibt beim Verdunsten des Lösungsmittels das Zelluloidhäutchen auf der Oberfläche schwimmend zurück und läßt sich mit einem geeigneten Rahmen leicht herausfischen. Aus der Interferenzfarbe dieses relativ dicken Häutchens kann man dann seine Dicke ermitteln. Nun verdünnt man die Lösung weiter, z. B. auf $\frac{1}{20}$; wenn man dann dafür sorgt, daß die Häutchen gleiche Flächen bedecken und gleichmäßig dick sind, dann ist die Dicke von solchen Häutchen, die bereits keine Interferenzfarben mehr zeigen, unmittelbar durch das Konzentrationsverhältnis gegeben. Als Träger für die Häutchen habe ich gewöhnlich dünne Zelluloidplatten benutzt, in die passende Löcher von 1—3 mm Durchmesser gebohrt waren. Die Herstellung von sehr dünnen Glimmerhäutchen erfordert praktisch überhaupt keine technischen Hilfsmittel, sondern nur einige manuelle Geschicklichkeit. Man kommt am sichersten zum Ziel, wenn man sich geduldig bemüht, von einer dickeren Glimmerplatte vom Rand aus ein möglichst dünnes Blatt vorsichtig abzulösen. An den Stellen, wo sich der letzte Zusammenhang zwischen abgehobenem Blatt und dicker Glimmerplatte löst, erhält man dann relativ häufig solche Häutchen, die lebhaft Interferenzfarben zeigen. Nach einiger Übung findet man gelegentlich auch Häutchen, die praktisch keine Interferenzfarben mehr zeigen; sie müssen allerdings auch mit besonderer Vorsicht behandelt werden, da sie sich leicht zusammenrollen und schon durch bloße Berührung unbrauchbar werden können.

Verschiedentlich sind dünne Metallhäutchen zu Interferenzversuchen mit Kathodenstrahlen verwendet worden. Am ein-

fach
man
z. B.
Ver
auch
Glei
bzw
die
oder
der
bzw
chen
getr
troc
Trop

und
fahr
auf
beli
steh
dün
wird
oder
Wei
gew
ich
schl
heri
zug
fere
die

Jahr

CdO

Kris

fachsten erhält man natürlich dünne Metallblättchen, wenn man das betreffende Blattmetall mit einer geeigneten Säure, z. B. käufliches Blattgold mit Königswasser, behandelt; dieses Verfahren ist aber auf wenige Metalle beschränkt und liefert auch meist nur Schichten von ziemlich ungleichmäßiger Dicke. Gleichmäßigere Schichten erhält man durch Kathodenzerstäubung bzw. Verdampfung des betreffenden Metalls im Vakuum auf die Oberfläche eines glatt polierten, wasserlöslichen Kristalls oder auf eine dickere, als Träger dienende Zelluloidschicht; der Kristall- bzw. die Zelluloidschicht, muß dann in Wasser bzw. Amylacetat aufgelöst werden. Das zurückbleibende Häutchen wird vorsichtig aus der Flüssigkeit herausgefischt und getrocknet. Die Schwierigkeit besteht darin, das Häutchen zu trocknen, ohne daß es von der Oberflächenspannung des letzten Tropfens zerrissen wird.

Das zuletzt geschilderte Verfahren ist sehr zeitraubend und mühsam. Ich habe deshalb ein weit bequemerer Verfahren benutzt¹⁾, das zugleich den Vorteil hat, daß es nicht auf Metalle beschränkt ist, sondern für die Verwendung jeder beliebigen Kristallsubstanz geeignet ist. Das Verfahren besteht darin, daß als Träger für die Substanz ein extrem dünnes Häutchen, z. B. aus Zelluloid oder Kollodium, benutzt wird, dessen zerstreue Wirkung so gering ist, daß sie wenig oder gar nicht stört. Die Substanz kann in verschiedener Weise, z. B. durch Aufdampfen oder Auskristallisieren, in der gewünschten Schichtdicke auf das Häutchen gebracht werden; ich habe auf diesem Wege von einer großen Zahl der verschiedenartigsten Substanzen²⁾, die zum Teil nach den bisherigen Methoden noch gar nicht einer solchen Untersuchung zugänglich waren, ohne Schwierigkeiten einwandfreie Interferenzbilder mit Kathodenstrahlen erhalten (als Beispiel vgl. die in Fig. 5, Taf. 2, reproduzierte Aufnahme von NaF).

1) Eine Beschreibung des Verfahrens wurde schon vor etwa einem Jahre gegeben (Naturwiss. 1930).

2) Untersucht wurden bisher NaCl, NaF, NaBr, KCl, NH_4Cl , MgO, CdO, HgCl , HgCl_2 ; Cd, Zn, Pb, Au, Bi.

Alle diese Substanzen zeigten in extrem dünner Schicht das gleiche Kristallgitter, wie es aus Röntgen-Strukturuntersuchungen bekannt ist.

II. Die exakte Gültigkeit der wellenmechanischen Beziehung
 $\lambda = \frac{h}{m v}$ und ihre Verwendung zur Bestimmung der fundamen-
 talen Atomkonstanten

Soweit die de Brogliesche Beziehung $\lambda = \frac{h}{m v}$ bisher einer genaueren experimentellen Prüfung unterworfen wurde, hat man sie meist bestätigt gefunden. Die genauesten Wellenlängenmessungen an Kathodenstrahlen sind wohl bisher von G. P. Thomson¹⁾ und Ponte²⁾ veröffentlicht worden; sie beziehen sich auf Kristallpulverinterferenzen einerseits an einer Reihe von Metallen, anderseits an ZnO. Setzt man in die Interferenzbedingung im Kristallgitter den aus der Röntgenstrukturanalyse übernommenen Wert der Gitterkonstanten und den gemessenen Reflexionswinkel ϑ ein, so erhält man die gesuchte Wellenlänge. Um nun diese „gemessene“ Wellenlänge mit der wellenmechanisch berechneten $\lambda = \frac{h}{m v}$ zu vergleichen, ist man bisher stets so vorgegangen, daß man als zweite Bestimmungsgröße die Beschleunigungsspannung P ermittelte, welche die zur Interferenz gelangenden Elektronen vorher durchlaufen hatten. Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie muß dann nämlich, wenn wir noch mit e in üblicher Weise die Ladung des Elektrons bezeichnen:

$$e P = E_{\text{kin.}}$$

sein, wobei $E_{\text{kin.}}$ die kinetische Energie des Elektrons, bekanntlich in einfachster Weise als Differenz geschrieben werden kann aus der Gesamtenergie $m c^2$ eines Elektrons mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ und seiner Ruheenergie $m_0 c^2$. Da

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, ist also zu setzen:

$$e P = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

1) Vgl. G. P. Thomson, *The Wave Mechanics of Free Elektrons*, p. 69 u. *Proc. Roy. Soc.* 119. p. 651. 1928.

2) M. Ponte, *Ann. de phys.* 13. p. 395. 1930.

Kombiniert man diese Beziehung mit $\lambda = \frac{h}{mv}$, so ergibt sich also die experimentell prüfbare Beziehung:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{eP(2m_0c^2 + eP)}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eP\left(1 + \frac{eP}{2m_0c^2}\right)}}.$$

Eine quantitative Prüfung dieser Beziehung erfordert also außer der Messung von λ und P noch die Kenntnis von h , e und m_0 , oder von h , e und e/m_0 , die aus anderen Messungen übernommen werden müssen.¹⁾ Damit wird aber auch die Unsicherheit mit übernommen, die bezüglich des Absolutwertes dieser fundamentalen Atomkonstanten noch besteht, und die trotz aller Präzisionsmessungen noch auf fast 1 Proz. geschätzt werden muß. Bei den bisherigen, oben zitierten Untersuchungen dürfte allerdings eine Unsicherheit von dieser Größe kaum eine Rolle gespielt haben, da die Fehler der Messungen selbst von der gleichen Größenordnung waren. Der schwächste Punkt bei diesen Messungen ist ohne Zweifel die Spannungsmessung; denn die Absolutmessung einer Spannung von etwa 30 kV, oder sogar 200 kV, auf weniger als 1 Proz. genau, bietet schon, wenn es sich um konstante Gleichspannung handelt, fast unüberwindliche Schwierigkeiten, und wird völlig illusorisch, wenn die Spannung in unkontrollierter Weise um einige Prozent schwankt. Die experimentelle Bestimmung des Streuwinkels dagegen läßt sich bei geeigneten Maßnahmen sehr genau durchführen. Wenn man nämlich eine genügend enge Ausblendung anwendet, erhält man auch an einem Kristallpulver so scharfe Interferenzringe, daß man ihren Durchmesser auf mindestens 0,1 mm genau angeben kann; wenn der Durchmesser der Ringe 2–3 cm ist, kann man demnach bei der Messung des Streuwinkels relativ leicht eine absolute Meßgenauigkeit von einigen Promille erreichen. Dies mag durch die Auswertung einiger Aufnahmen von NaCl, dessen Gitterkonstante bekanntlich in der Röntgenspektroskopie als Nor-

1) Die Lichtgeschwindigkeit c ist so genau bekannt, daß ihr Wert als Fehlerquelle praktisch nicht in Frage kommt, zumal sie nur im relativistischen Korrektionsglied auftritt.

male dient, und von NaF belegt werden.¹⁾ Der zur Interferenzwirkung kommende Kathodenstrahl war bei diesen Aufnahmen durch zwei Lochblenden von je 0,1 mm Durchmesser im Abstand von 15 cm begrenzt. Um die Fluktuation der Röhrenspannung (Gleichspannung einer Kondensator-Hochspannungsanlage) möglichst niedrig zu halten, wurde mit sehr kleiner Stromstärke (etwa 0,1 mA) gearbeitet.²⁾ Die in der Tabelle zusammengestellten Messungsergebnisse an drei verschiedenen Aufnahmen zeigen, daß man den Streuwinkel θ leicht auf wenige Promille genau ermitteln kann. Der Abstand: Kristall-photographische Platte wurde mit der Schublehre zu $250 \text{ mm} \pm 1$ Promille ermittelt. Für die Wellenlänge ergeben sich infolgedessen die Zahlen der Spalte 5.

Die Ergebnisse der Aufnahmen 1, 2 und 3, die bei gleicher Röhrenspannung aufgenommen sind, stimmen untereinander recht gut überein; kombiniert man die beiden letzten Aufnahmen, die unabhängig voneinander ausgewertet sind, so erhält man aus den Fehlerquadraten als mittleren Fehler des angenommenen Mittelwertes 2 Promille. Nimmt man hierzu den Fehler von 1 Promille in der Abstandsmessung und einen möglichen Fehler von 5 Promille im Absolutwert der Gitterkonstanten, so erhält man als maximal möglichen Fehler der Wellenlängen in der letzten Spalte rund 1 Proz. Die aus der Röhrenspannung berechneten Wellenlängenwerte liegen nun aber bei allen Aufnahmen gegenüber den beobachteten Werten um etwa 2,5 Proz. zu hoch!

Die Ursache für diese unerwartet große Abweichung wird aber kaum in einem Versagen der de Broglieschen Wellenlängenbeziehung, sondern wahrscheinlich in der Spannungsmessung zu suchen sein. (Die letztere geschah durch Messung der primären Transformatorspannung; die zugehörige Sekundärspannung wurde einer Eichkurve entnommen, die unter Beobachtung aller nötigen Vorsichtsmaßregeln mittels einer Kugelfunkenstrecke gewonnen war.³⁾)

1) Eine der Aufnahmen ist in Fig. 5, Taf. 2 wiedergegeben.

2) Vgl. S. 745.

3) Die Eichung wurde seinerzeit von Herrn H. Ott durchgeführt; die der Hochspannungsanlage von der Firma beigegebene Eichkurve lieferte noch um etwa 5 Proz. höhere Spannungswerte!

Ausmessungsergebnis:

Aufnahme 1: NaCl; 54,2 kV; $\lambda_{\text{ber.}} = \frac{h}{mv} = 0,0512 \text{ \AA.}$

hkl	$2r$ in mm	$\frac{2}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$	Mittelwert $2r_{100}$	$\lambda_{\text{beob.}} = \frac{r_{001} \cdot d_{001}}{250}$
220	13,25	4,68	4,67 ₀	0,0525 ₀
222	16,2	4,68		
224	22,8	4,65		

Aufnahme 2: NaF; $d_{001} = 4,620 \text{ \AA.}$; 54,2 kV; $\lambda_{\text{ber.}} = 0,0512$

hkl	$2r$ in mm	$\frac{2r}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$	Mittelwert $2r_{001}$	$\lambda_{\text{beob.}} = \frac{r_{001} \cdot d_{001}}{250}$
002	11,3	5,65	5,67 ₈	0,0524 ₂
022	16,1	5,69		
222	19,8	5,72		
004	22,8	5,56		
024	25,6	5,72		
224	27,9	5,70		

Aufnahme 3: NaF; 54,2 kV; $\lambda_{\text{ber.}} = 0,0512$

hkl	$2r$ in mm	$\frac{2r}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$	Mittelwert $2r_{001}$	$\lambda_{\text{beob.}} = \frac{r_{001} \cdot d_{001}}{250}$
002	11,35	5,67	5,66 ₈	0,0523 ₇
022	16,1	5,69		
222	19,75	5,70		
004	22,8	5,56		
024	25,45	5,69		
224	27,9	5,70		

Eine wirklich einwandfreie absolute Spannungsmessung sollte mit hochohmigem Widerstand und Normalelementen möglich sein; die Belastung der Hochspannungsanlage durch den Widerstand würde aber wieder die Schwierigkeit der größeren Spannungsschwankung mit sich bringen. Ich habe deshalb zur Prüfung der Gültigkeit der de Broglieschen Beziehung einen ganz anderen Weg eingeschlagen, den ich hier nur kurz skizzieren möchte. Die Bestimmung der Wellenlänge aus den Interferenzen liefert

$$\lambda = \frac{h}{mv};$$

von den auf der rechten Seite stehenden Größen läßt sich aber v nach einer früher ausgearbeiteten Methode¹⁾ sehr genau direkt messen. Man kann also durch Kombination von Interferenzbeobachtungen mit einer direkten Geschwindigkeitsmessung (am gleichen Kathodenstrahl!) den Quotienten h/m unmittelbar aus reinen Längenmessungen bestimmen und zur Prüfung der de Broglieschen Beziehung mit den nach anderen Methoden erhaltenen Werten vergleichen. Wenn man andererseits die de Brogliesche Beziehung als richtig annimmt, so liefert der so erhaltene Wert eine neue Kombination der fundamentalen Atomkonstanten; nimmt man schließlich noch den aus der Spektroskopie des Comptoneffekts (ebenfalls aus Längenmessungen ermittelten) Quotienten h/m_0 hinzu, so hat man auch eine direkte Messung der Massenabhängigkeit des Elektrons von der Geschwindigkeit.

Die diesbezüglichen Versuche habe ich in Angriff genommen; ich hoffe, bald über ihre Ergebnisse zu berichten.

III. Allgemeines über Kristallgitterspektroskopie von Elektronenstrahlen

A. Auflösungsvermögen

Als Auflösungsvermögen eines Spektralapparates bezeichnet man bekanntlich in der Optik das Verhältnis der Wellenlänge λ zu demjenigen Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$, der bei der spektralen Zerlegung gerade noch getrennt erscheint. Bei kleinen Streuwinkeln ϑ gilt, wie man sich durch Differentiation der Interferenzbedingung leicht überzeugt, die Beziehung

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\vartheta}{\Delta\vartheta},$$

wobei also $\Delta\vartheta$ den zu $\Delta\lambda$ gehörigen Unterschied des Streuwinkels darstellt. Die Schärfe der Interferenzmaxima muß also bei Verwendung monochromatischer Strahlung mit gesteigertem Auflösungsvermögen zunehmen. Umgekehrt kann man aus der beobachteten Schärfe der Interferenzmaxima wenigstens auf eine untere Grenze für das Auflösungsvermögen schließen. Verschiedene Versuche hierzu liegen schon vor²⁾; sie haben aber

1) F. Kirchner, Phys. Ztschr. 25. S. 302. 1924.

2) G. P. Thomson, Proc. Roy. Soc. 119. p. 658. 1928; E. Rupp, Naturw. 1929, S. 875; E. Schöbitz, Phys. Ztschr. 32. S. 37. 1931.

im günstigsten Falle nur eine untere Grenze von etwa 50—80 geliefert. Mit der hier benutzten, besonders feinen Ausblendung ließ sich diese Grenze wesentlich weiter hinausrücken. Mit einer Anzahl von Einkristallen (Glimmer, Nitrozellulose) habe ich mehrfach so scharfe Interferenzaufnahmen (vgl. Fig. 3, Taf. 1 und Fig. 6, Taf. 2) erhalten, daß der Quotient $\vartheta/\Delta\vartheta$, selbst wenn man für $\Delta\vartheta$ die gesamte Breite des Interferenzmaximums einsetzt, nahezu gleich 1000 wird. Die Schärfe war bei verschiedenen Aufnahmen sogar größer, als man nach der natürlichen Divergenz des Strahls selbst bei der hier verwendeten sehr feinen Ausblendung erwartet hätte; die Ursache für diese unerwartete Erscheinung, die übrigens gelegentlich auch bei Pulveraufnahmen auftrat, muß offensichtlich in einer zufälligen, nicht beabsichtigten Verfeinerung der Strahlausblendung gesucht werden.¹⁾

Eine untere Grenze 1000 für das Auflösungsvermögen des hier als Spektralapparat verwendeten Glimmerkristalls ist aber meines Erachtens auch durchaus nicht überraschend, wenn man nicht von vornherein das Wellenfeld der Elektronen sowohl nach der Breite, wie nach der Tiefe als begrenzt annehmen will. Denn, wenn man mit einem sehr langen Wellenzug rechnet, der über den ganzen Strahlquerschnitt kohärent ist, kann man den ganzen Interferenzvorgang nach den gewöhnlichen Gesetzen der Optik behandeln. Wegen der geringen Dicke des Glimmerkristalls wird die Schärfe der Interferenzmaxima wellenkinematisch einzig und allein durch die beiden Interferenzbedingungen des Kreuzgitters bestimmt; die Interferenzbedingung für die Punktreihe senkrecht zum Kreuzgitter (d. h. parallel zum Strahl!) liefert wegen der geringen Zahl der in dieser Richtung vorhandenen Gitterpunkte verwaschene Maxima, die sich im allgemeinen nur durch ihren Einfluß auf die Intensität der Kreuzgitterinterferenzmaxima bemerkbar machen.

Bei einem Strahldurchmesser von 0,1 mm und einer Gitterkonstante des Glimmerkristalls von rund 6 ÅE trifft also der

1) Eine solche Verfeinerung der Ausblendung kann z. B. dadurch entstehen, daß nur ein sehr schmaler Randbereich der letzten Blende (B_2 in Fig. 2) vom Strahl „ausgefüllt“ wird.

Strahl s_0 in jeder kristallographisch gleichwertigen Richtung a_i auf eine Punktreihe, die $\frac{1 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-8}}$, d. h. etwa $2 \cdot 10^5$ Gitterpunkte enthält. Nehmen alle diese Atome an der Interferenz teil, dann würde also in der bekannten Interferenzfunktion¹⁾

$$I = \text{const} \frac{\sin^2 \left\{ m \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot (a_i, s - s_0) \right\}}{\sin^2 \left\{ \frac{\pi}{\lambda} (a_i, s - s_0) \right\}}$$

die Zahl m der Beugungszentren gleich $2 \cdot 10^5$ zu setzen sein. Aus der Breite der Hauptmaxima bzw. dem Abstand der nächsten benachbarten Nebenmaxima der Intensitätsfunktion liest man unmittelbar das theoretische Auflösungsvermögen des Gitters ab für die n -te Ordnung zu:

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{\vartheta}{\Delta \vartheta} = n \cdot m \approx n \cdot 2 \cdot 10^5.$$

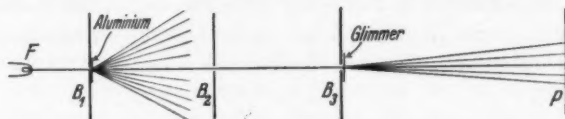
Das theoretische Auflösungsvermögen ist also immer noch wesentlich größer als die unter den günstigsten Bedingungen aus dem Experiment erschlossene untere Grenze.

B. Spektrale Zerlegung von Elektronenstrahlen, die eine Al-Folie passiert haben

Schließlich soll noch über einige Versuche berichtet werden, bei denen ein dünner Glimmerkristall gewissermaßen als Spektrograph für Elektronenwellen Verwendung gefunden hat. Als erstes interessierte mich die Frage: welche spektrale Verteilung besitzt eine homogene Elektronenstrahlung nach dem Durchgang durch eine mäßig dicke Schicht Materie. Aus Untersuchungen über die magnetische Ablenkbarkeit solcher Strahlen wissen wir, daß Kathodenstrahlen beim Durchgang durch eine dünne Materieschicht einen Geschwindigkeitsverlust erleiden, dessen Größe durch das Whiddingtonsche v^4 -Gesetz geregelt wird, und daß der Strahl im ganzen auch nach dem Durchgang durch die Schicht eine ziemlich einheitliche Geschwindigkeit besitzt, d. h. annähernd homogen bleibt. Ich habe nun den folgenden Versuch gemacht: Unmittelbar hinter die erste Blende wurde (vgl. Fig. 8) ein Stück Aluminiumfolie von $1 \cdot 10^{-3}$ cm Dicke gebracht. Ein Teil der die Folie durch-

1) Vgl. M. v. Laue, *Encycl. d. math. Wiss.* Bd. V, III. Teil, S. 457.

setzenden Kathodenstrahlen wurde dann in normaler Weise von der zweiten Lochblende ausgeblendet und von dem unmittelbar dahinter sitzenden dünnen Glimmerkristall spektral zerlegt. Das Ergebnis des Versuches zeigt die Aufnahme (Fig. 9, Taf. 2); man sieht, daß bei der hier verwendeten Dicke der Aluminiumschicht von einer Homogenität der durchgegangenen Strahlung nicht mehr gesprochen werden kann, sondern daß man einen relativ breiten Geschwindigkeitsbereich



Versuchsanordnung zur kristallspektroskopischen Untersuchung der durch eine Aluminiumfolie hindurchgegangenen Strahlung

Fig. 8

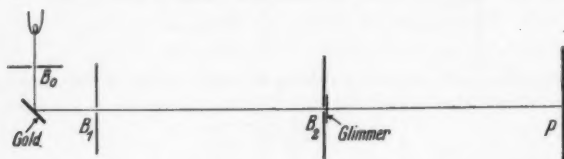
vor sich hat. Jeder einzelne Interferenzpunkt des Glimmerkristalls ist dementsprechend in ein ganzes Spektrum auseinandergezogen. Das Spektrum erstreckt sich, wenn wir mit λ_0 seine kurzwellige Grenze bezeichnen, von λ_0 bis mindestens etwa $1,3 \lambda_0$, entsprechend einem Voltgeschwindigkeitsbereich von etwa 50—30 kV! Die Hauptintensität des Spektrums ist auf der kurzwelligen Seite konzentriert, nach langen Wellen hin fällt die Intensität beträchtlich flacher ab wie auf der kurzwelligen Seite. Das Intensitätsmaximum liegt bei einer Wellenlänge, die um etwa 5 Proz. größer ist, als die kurzwellige Grenze (entsprechend einem Spannungsunterschied von etwa 10 Proz.).¹⁾

C. Spektrale Zerlegung von „reflektierten“ Elektronenstrahlen

Ein zweiter Versuch betraf die spektrale Zerlegung derjenigen Strahlen, die an einer massiven Metalloberfläche „reflektiert“ sind. Die Versuchsanordnung geht aus Fig. 10

1) Aus den Geschwindigkeitsverlustmessungen an sehr dünnen Schichten mittels magnetischer Ablenkung würde sich für den vorliegenden Fall ($\beta = 0,41$) mit $\frac{d\beta}{dx} = 23 \text{ cm}^{-1}$ (nach einer Tabelle von W. Bothe im Handbch. der Phys. Bd. 24, S. 28) ein Geschwindigkeitsverlust von 5,6 Proz. ergeben.

hervor. Homogene Kathodenstrahlen fallen auf ein um 45° gegen die Strahlen geneigtes Goldblech. Von der senkrecht zur primären Kathodenstrahlrichtung ausgehenden Strahlung wird durch das normale Blendensystem (zwei Lochblenden zu 0,1 mm!) ein enges Bündel ausgesondert und der spektralen Untersuchung durch den gleichen dünnen Glimmerkristall unterworfen wie oben. Das Resultat (vgl. Fig. 11, Taf. 2) war qualitativ das gleiche wie beim vorhergehenden Versuch: die vom Goldblech kommende Strahlung ist keineswegs mehr homogen, sondern in ein kontinuierliches Spektrum auseinandergezogen.



Kristallspektroskopische Untersuchung der an einem Goldblech „reflektierten“ Strahlung

Fig. 10

Die Breite des Spektrums ist kaum geringer als in Fig. 9, Taf. 2; sie reicht mindestens von $\lambda_0 - 1,2 \lambda_0$, entsprechend einem Spannungsbereich von 60 bis etwa 40 kV! Das Intensitätsmaximum fällt jetzt praktisch mit der kurzwelligen Grenze zusammen, aber die Voltgeschwindigkeit, bei der die Intensität etwa auf die Hälfte der Maximalintensität (die letztere liegt wieder nahe bei der kurzwelligen Grenze!) heruntergesunken ist, liegt doch um etwa 5–10 Proz. niedriger als diejenige der kurzwelligen Grenze. Wenn man das Glimmerhäutchen in Fig. 10 durch ein Kristallpulver, z. B. ein Goldhäutchen, ersetzt, erhält man überhaupt keine scharfen, sondern nur breite und verwaschene Interferenzringe.¹⁾

1) Mit der gleichen Anordnung, nur mit weniger scharfer Ausblendung, erhielt E. Rupp (Naturw. 19. S. 109, 1931) mit 220 kV scharfe Interferenzringe, aus denen er auf eine „Polarisation“ der Elektronenwellen schließen zu können glaubt. Es ist aber schwer verständlich, wieso sich die Verhältnisse beim Übergang von 70 kV auf 220 kV so grundlegend ändern sollen.

Die verwendete Röhrenspannung lag zwischen 60 und 70 kV; die Belichtungszeiten waren wegen der geringen Intensität der Strahlung wesentlich höher als in der normalen Anordnung.

Die Tatsache, daß die vorher homogene Strahlung nach der „Reflexion“ am Goldblech inhomogen geworden ist, findet ihre natürliche Erklärung darin, daß wir es hier nicht mit einer wirklichen Reflexion, sondern eher mit einer Diffusion zu tun haben. Die auf das Goldblech fallenden Elektronen werden nur zu einem sehr geringen Bruchteil ganz ohne Geschwindigkeitsverlust reflektiert; der weitaus größte Teil dringt auf mehr oder weniger großen Umwegen in das Metall ein und verliert allmählich seine Geschwindigkeit. Ein Teil von den eingedrungenen Elektronen, die auf ihrem Wege eine sehr große Zahl von zufälligen kleinen Ablenkungen erleiden, kommt wieder aus dem Metall heraus: Rückdiffusion. Die Geschwindigkeitsverteilung der rückdiffundierten Elektronen muß hiernach qualitativ derjenigen entsprechen, die nach dem Passieren einer Materieschicht von hinreichender Dicke (vgl. S. 759) auftritt (kontinuierliches Spektrum mit Intensitätsmaximum nahe bei der kurzwelligen Grenze!). Die etwas geringere Breite des Spektrums mag ihre Ursache darin haben, daß die Wahrscheinlichkeit des Wiederaustritts aus dem Metall mit abnehmender Geschwindigkeit der Elektronen geringer wird.

Zusammenfassung

Teil I: Die Technik der Elektroneninterferenzen wird verbessert und weitgehend vereinfacht; ihre Grenzen werden diskutiert. Eine für vielseitige Verwendungszwecke konstruierte Apparatur wird beschrieben.

Teil II: Bei einer Prüfung der wellenmechanischen Beziehung $\lambda = \frac{h}{mv}$ wird gezeigt, daß die Interferenzaufnahmen eine so große Schärfe besitzen, daß bei ihrer Ausmessung leicht eine Genauigkeit von wenigen Promille erreicht werden kann. Die gemessene Wellenlänge stimmt nicht mit der nach der de Broglieschen Beziehung berechneten überein; die Ursache liegt wahrscheinlich in einer fehlerhaften Spannungs-

messung. Um letztere auszuschalten, sind Versuche in Angriff genommen, bei denen eine direkte Geschwindigkeitsmessung mit der Wellenlängenmessung kombiniert wird.

Teil IIIA: Aus der gesteigerten Schärfe der Interferenzen an Glimmerkristallen ergibt sich eine untere Grenze von 1000 für das Auflösungsvermögen des Gitters.

B. Durch spektrale Zerlegung der durch eine $1 \cdot 10^{-3}$ cm dicke Al-Folie hindurchgegangenen Strahlung mit Hilfe eines Glimmerkristalls wird gezeigt, daß der Geschwindigkeitsverlust in einer solchen Schicht keinesfalls mehr homogen ist, sondern daß ein breites kontinuierliches Spektrum vorliegt.

C. Dasselbe gilt von der Strahlung, die unter 90° von einem Goldblech „reflektiert“ wird; auch diese ist nach der Reflexion nicht mehr homogen, sondern zeigt ein kontinuierliches Spektrum.

Hrn. Geh.-Rat Sommerfeld, dem Vorstand des Instituts für theoretische Physik, schulde ich vor allem herzlichen Dank; Hrn. cand. H. Raether danke ich für seine treue Hilfe und rege Mitarbeit.

Zur Durchführung der Arbeiten wurde von der Rockefeller-Foundation ein besonderer Fond zur Verfügung gestellt, wofür auch an dieser Stelle bestens gedankt sei.

Nicht zuletzt gebührt mein Dank Hrn. Werkmeister K. Selmayr, dem es trotz der an die Apparatur gestellten verschiedenartigen Anforderungen gelungen ist, alle mechanischen Teile der Apparatur in besonders solide und handliche Formen zu bringen.

München, Inst. f. theor. Physik, August 1931.

(Eingegangen 20. August 1931)

Zur Disperstonstheorie des Schalles¹⁾

Von H. O. Kneser

(Mit 2 Figuren)

§ 1. Die kinetische Gastheorie im Verein mit der Quantentheorie lehrt, daß die Anteile der Gesamtenergie eines homogenen Gases, welche im Gleichgewichtszustand auf die Freiheitsgrade der Moleküle entfallen, in einem ganz bestimmten, angebbaren Verhältnis zueinander stehen, welches nur von der Temperatur abhängt. Unterscheidet man, wie üblich, zwischen äußeren — nämlich den translatorischen — und inneren — nämlich allen übrigen — Freiheitsgraden, und bezeichnet man die zugehörigen Energieanteile bzw. mit E_a und E_i , so läßt sich die Aussage unter Verzicht auf die mögliche Spezialisierung so formulieren:

$$E_a : E_i = f(T).$$

Bei irgendeiner Änderung der Gesamtenergie können sich daher beide Anteile stets nur im gleichen Sinn verändern, sofern das Gleichgewicht nicht gestört werden soll. Nun ist aber eine Energieänderung, an der von vornherein äußere und innere Freiheitsgrade gleich stark beteiligt sind, nicht denkbar. Ein- oder Ausstrahlung kann primär nur die innere Energie vermehren oder vermindern; alle übrigen Möglichkeiten, den Energieinhalt zu verändern — und nur von diesen wird im folgenden gehandelt werden —, müssen zunächst eine Änderung der Schwerpunktsbewegung der Moleküle, also der kinetischen Energie der Translation (E_a) zur Folge haben. Nimmt man z. B. eine adiabatische Kompression vor, indem man einen Stempel in einen wärmedicht umschlossenen Kolben stößt, so nimmt zuerst nur die Bewegungsgröße der auf den Stempel

1) Marburger Habilitationsschrift, Teil I.

treffenden Moleküle zu. Erst in der weiteren Folgezeit kann durch Zusammenstöße mit anderen Molekülen der Zuwachs an äußerer Energie zum gehörigen Teil in innere umgesetzt, und der Gleichgewichtszustand hergestellt werden. Da es sich hier aber um außerordentlich kleine Zeitintervalle handelt, so wird man nur bei sehr raschen Zustandsänderungen eine Modifikation der thermodynamisch-statistischen Gesetze infolge der verzögerten Einstellung des Energiegleichgewichts zu erwarten haben.

Es liegt nahe, diese Überlegungen auf die Ausbreitung des Schalles anzuwenden.¹⁾ Jedes Volumenelement einer Gasmasse, in der sich eine Schallwelle ausbreitet, erleidet adiabatische Druck- und Temperaturänderungen von zeitlich wechselndem Vorzeichen. Man muß erwarten — und dies wird durch das Experiment in vollem Umfang bestätigt —, daß der Umsatz von äußerer in innere Energie um so unvollständiger vor sich geht, E_i um so mehr hinter dem Gleichgewichtswert, der dem Momentanzustand des Gases entspricht ($E_a: f(T)$), zurückbleibt, je mehr sich die Periodendauer der Schallwelle dem Zeitintervall nähert, das zur Einstellung des Gleichgewichts erforderlich ist. Im Grenzfall unendlich kleiner Periodendauer wird auch die Variation des in innere Energie umgesetzten Energieanteils verschwinden, und dies muß sich als Abnahme der spezifischen Wärme für den periodischen Vorgang auswirken; denn gleiche Energiezufuhr bedingt jetzt ein stärkeres Anwachsen der äußeren Energie und damit der Temperatur. Bedeutet C die spezifische Wärme (pro Mol) bei konstantem Volumen:

$$C = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_v = \left. \frac{\partial E_a}{\partial T} \right|_v + \left. \frac{\partial E_i}{\partial T} \right|_v = C_a + C_i,$$

so wird man hiernach bei steigender Frequenz des Zustandswechsels eine scheinbare Abnahme von C bis auf den Wert

1) Dies hat bereits H. A. Lorentz getan in seiner klassischen Abhandlung: *Les équations du mouvement des Gaz* ... Arch. Néerland. 16. S. 1. 1881; ferner K. F. Herzfeld u. F. O. Rice, *Phys. Rev.* 31. S. 691. 1928. Auf beide Arbeiten wird später näher einzugehen sein. Endlich hat D. G. Bourgin (*Phil. Mag.* 7. S. 821. 1929) derartige Rechnungen durchgeführt, deren Ergebnisse allerdings kaum an der Erfahrung zu prüfen sein dürften. Einen Hinweis in dieser Richtung findet man auch bei L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie* Bd. II. S. 131; Leipzig 1912.

von C_a erwarten. Nun geht C maßgeblich in die klassische Formel für die Schallgeschwindigkeit in Gasen ein:

$$V = \sqrt{\frac{p}{\varrho} \left(1 + \frac{R}{C}\right)} \quad 1)$$

(p = Druck; ϱ = Dichte des Gases; R = Gaskonstante).

Mit wachsender Frequenz muß also V ansteigen und zwar asymptotisch bis zum Wert:

$$V = \sqrt{\frac{p}{\varrho} \left(1 + \frac{R}{C_a}\right)}.$$

Es erhebt sich die Frage, von welcher molekular-kinetischen Größe die Geschwindigkeit abhängt, mit der sich das Energiegleichgewicht einstellt. Da der Energieaustausch zwischen äußeren und inneren Freiheitsgraden quantenhaft vor sich geht, so ist dem Elementarakte der Umwandlung in innere Energie und dem der Rückverwandlung je ein bestimmter Zeitpunkt zuzuordnen, zwischen denen ein Zeitraum liegt, den man als die Lebensdauer des Energiequants bezeichnen kann. Es wird sich nun zeigen, daß im wesentlichen diese Lebensdauer es ist, die die Einstelldauer des Gleichgewichts bestimmt. Schematisierend kann man den Sachverhalt etwa so beschreiben: Die Lebensdauer spielt für das Energiegleichgewicht die Rolle eines nicht zu unterschreitenden Zeitquantums. Durch Vorgänge, die sich in kürzeren Zeiträumen abspielen, wird die Energieverteilung nicht oder nur unerheblich beeinflusst. Der unvollständige Energieaustausch und somit der Anstieg der Schallgeschwindigkeit sollte sich also dann bemerkbar machen, wenn die Periodendauer der Schallwelle der Lebensdauer vergleichbar wird oder kleiner als sie.

Die theoretische Fundamentierung, deren diese Überlegungen natürlich bedürfen, versuchen die folgenden Rechnungen zu geben. In ihnen ist von vornherein der Einfluß von innerer Reibung und Wärmeleitung des Gases auf die

1) Aus der üblichen Form der Schallgeschwindigkeitsbeziehung:

$$V = \sqrt{\frac{p}{\varrho} \frac{C_p}{C_v}}$$

ist C_p eliminiert mit Hilfe der Gleichung: $R = C_p - C_v$.

Schallgeschwindigkeit unberücksichtigt geblieben. Nur auf diesem Wege nämlich ist es möglich, zu einer expliziten Dispersionsformel zu gelangen.

§ 2. Es sollen bedeuten:

p und ϱ den Druck bzw. die Dichte des Gases im Gleichgewichtszustand;

$(p + \pi)$ und $\varrho(1 + s)$ dieselben Größen beim Auftreten einer ebenen Schallwelle, wobei $p \gg \pi$ und $1 \gg s$ sei;

x die Koordinate in Richtung der Wellennormalen;

X die Abweichung eines Massenelementes in Richtung x von der Gleichgewichtslage;

v das Volumen eines Mols.

Dann lautet die Eulersche Bewegungsgleichung:

$$(1) \quad -\frac{\partial \pi}{\partial x} = \varrho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$$

und der Erhaltungssatz der Materie:

$$(2) \quad -s = \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Der allgemeinste Ansatz für eine ebene Schallwelle ist:

$$(3) \quad \begin{cases} \pi = \pi_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) + \psi \right] \\ \quad = \pi_0 e^{j \left[\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) + \psi \right]} \\ s = s_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right] \\ \quad = s_0 e^{j \omega \left(t - \frac{x}{V} \right)}, \end{cases}$$

worin V die Schallgeschwindigkeit und ω die Kreisfrequenz bedeutet, $j = \sqrt{-1}$ und ψ eine beliebige Phasenkonstante ist. Da alle Absorption bedingenden Einflüsse unberücksichtigt bleiben sollen, braucht ein Dämpfungsglied nicht eingeführt zu werden.

Aus (1) und (2) gewinnt man die Wellengleichung:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Geht man in sie mit den Ansätzen (3) ein, indem man berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{V^2} \pi \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s$$

ist, so erhält man:

$$(4) \quad V^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\pi}{s} = \frac{1}{\rho} \frac{\pi_0}{s_0} e^{j\psi}.$$

Wenn sich, wie es in der folgenden Rechnung der Fall ist, für $\frac{1}{\rho} \frac{\pi}{s}$ ein komplexer Ausdruck ergibt, so bedeutet das nichts anderes, als daß $\psi \neq 0$, d. h. eine Phasenverschiebung zwischen Druck- und Verdichtungsstelle vorhanden ist. Das Quadrat der Schallgeschwindigkeit ist dann dem absoluten Betrag von $\frac{1}{\rho} \frac{\pi}{s}$ gleichzusetzen und $\operatorname{tg} \psi$ dem Quotienten aus Imaginär- und Realteil.

Wegen $v \cdot \rho = \text{const}$ und $\frac{dv}{d\rho} = -\frac{v}{\rho}$ gilt ferner:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\pi}{s} = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\partial p}{\partial v} \frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{v} \left(\frac{d(pv)}{dv} - p \right) \frac{-v}{\rho} \\ \quad = \frac{p}{\rho} \left(1 - \frac{1}{p} \frac{d(pv)}{dv} \right).^{1)} \end{cases}$$

§ 3. Der Energiesatz kann für adiabatische Prozesse so formuliert werden:

$$(6) \quad C dT + p dv = 0,$$

worin C die spezifische Wärme bei konstantem Volumen (bezogen auf 1 Mol) und T die Temperatur bedeutet. Der erste Term kann, wie bereits bemerkt, gespalten werden in einen Summanden, der der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung der Moleküle Rechnung trägt ($dE_a = C_a dT$) und in einen, der angibt, welchen Energiebetrag die Moleküle in Form von Rotations-, Schwingungs- und Elektronenenergie enthalten ($dE_i = C_i dT$). Im Gleichgewichtszustand und bei langsamen Zustandsänderungen ist E_i lediglich Funktion der Temperatur. Bei schnellen, periodischen Zustandsänderungen dagegen wird E_i auch von der Frequenz abhängen, weil der der Temperaturänderung entsprechende Energieanteil nicht mehr in vollem Umfang von den inneren Freiheitsgraden übernommen werden kann.

Wir tragen dem Rechnung durch den Ansatz:

$$(7) \quad dE_i = C'_i dT = C_i F(\omega) dT,$$

1) Die hier benützte Ableitung schließt sich eng an A. Einstein, Ber. d. Berl. Akad. 1920, S. 380 an.

wobei zunächst über $F(\omega)$ keine anderen Annahmen gemacht werden sollen, als:

$$F(0) = 1 > F(\omega) > 0 = F(\infty).$$

Jetzt lautet (6):

$$(6') \quad C_a dT + C_i F(\omega) dT + p dv = 0.$$

Zusammen mit der Zustandsgleichung der idealen Gase (wiederum auf 1 Mol bezogen): $d(pv) = R dT$ liefert (6') in (5) eingesetzt:

$$(8) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\pi}{s} = \frac{p}{\varrho} \left(1 + \frac{R}{C_a + C_i F(\omega)} \right).^{1)}$$

§ 4. Es handelt sich nunmehr darum, die Funktion $F(\omega)$ geeignet festzulegen.

E_i ist gleich $v \sum_k n_k \varepsilon_k$, wo n_k die Anzahl von Molekülen

pro Volumeinheit bedeuten möge, die die innere Energie ε_k besitzen. Statt der Summe soll zur Vereinfachung $n \varepsilon$ geschrieben, d. h. angenommen werden, daß nur ein Energiezustand (ε) mit einer merklich von 0 verschiedenen Besetzungszahl (n) vertreten sei, eine Annahme, deren Berechtigung von Fall zu Fall geprüft werden muß. Dann ist:

$$(9) \quad E_i = v n \varepsilon = \int C'_i dT.$$

n und damit die gesamte innere Energie E_i ändert sich nur dann, wenn bei einem Zusammenstoß zweier Moleküle Translationsenergie in innere verwandelt, d. h. einer der Stoßpartner durch Stoß erster Art angeregt wird, oder beim umgekehrten Prozeß. Hingegen bleiben n und E_i unverändert, wenn beim Zusammenstoß eines angeregten mit einem nicht-angeregten Molekül das Energiequant auf das letztere übergeht, also nur den Besitzer wechselt. Die Anzahl der Stöße erster Art pro Volum- und Zeiteinheit ist proportional $N \cdot (N - n)$, wobei N die Gesamtzahl der in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle bedeutet, $(N - n)$ die Anzahl der nicht angeregten. Die Anzahl der umgekehrten Prozesse, bei denen innere in Translationsenergie verwandelt wird, ist dementsprechend pro-

1) Vgl. hierzu Anm. 1, S. 773.

portional $n \cdot N$ zu setzen. Man erhält auf diese Weise eine „Reaktionsgleichung“:

$$(10) \quad \frac{dn}{dt} = \frac{1}{a} (N - n) \cdot N - \frac{1}{b} n \cdot N.$$

Die Konstanten $1/a$ und $1/b$ geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Zusammenstoß zur Umwandlung von Translations- in innere Energie führt, bzw. zum umgekehrten Prozeß. In der Größe b/N erkennt man die „Abklingungszeit“ der inneren Energie¹⁾, die formal völlig identisch ist mit der Lebensdauer des Energiequants, d. h. der Zeit, während welcher durchschnittlich ein Quant in Form von innerer Energie erhalten bleibt. Diese Zeit ist durchaus zu unterscheiden von der „Lebensdauer des angeregten Zustandes“, welche angibt, wie lange ein Molekül durchschnittlich in diesem Zustand verbleibt. Die erstere ist, wenn Übertragung von innerer Energie als solcher nicht vorkommt, gleich, sonst größer als die letztere.

Gl. (10) ist nun auf eine zeitlich periodische Störung des Gleichgewichts anzuwenden. Man hat zu setzen:

$$(11) \quad N = N_0 (1 + Q e^{j\omega t}).$$

Unter der Voraussetzung, die bereits den Gl. (1) und (2) zugrunde liegt, daß nämlich nur kleine Störungen auftreten, ($Q^2 \ll 1$) ist die stationäre Lösung von der Form:

$$(12) \quad n = n_0 (1 + q e^{j(\omega t - \varphi)}).$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke für N und n in (10) erhält man:

$$j\omega n_0 q e^{j(\omega t - \varphi)} = \frac{1}{a} N_0^2 (1 + 2Q e^{j\omega t}) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \cdot N_0 n_0 (1 + Q e^{j\omega t} + q e^{j(\omega t - \varphi)}).$$

Unter Benützung der Abkürzung:

$$(13) \quad \frac{1}{\beta} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \cdot N_0$$

1) Mit $\frac{1}{a} = 0$ würde die Lösung der Differentialgleichung lauten:

$n = n_0 e^{-\frac{N}{b} t}$, und für die Abklingung der inneren Energie würde sich ergeben: $E_i = v n \epsilon = E_{i_0} \cdot e^{-\frac{N}{b} t}$.

ergibt sich:

$$\frac{1}{a} N_0^2 - \frac{1}{\beta} n_0 = \left[\frac{2}{a} N_0^2 Q - \frac{1}{\beta} n_0 (Q + q e^{-j\varphi}) - j \omega n_0 q e^{-j\varphi} \right] e^{j\omega t}.$$

Sowohl die linke Seite der Gleichung, wie der Faktor des zeitabhängigen Gliedes ($e^{j\omega t}$) müssen gleich 0 sein. Also einerseits:

$$(14) \quad n_0 = \frac{\beta}{a} N_0^2 \quad \text{und} \quad \frac{n_0}{N_0} = \frac{\beta}{a} N_0 = \frac{b}{a+b},$$

wodurch der Gleichgewichtszustand bestimmt ist. Andererseits liefert der Klammerausdruck

$$(15) \quad j\omega + \frac{1}{\beta} = \frac{Q}{q} \left(\frac{2}{a} \frac{N_0^2}{n_0} - \frac{1}{\beta} \right) \cdot e^{j\varphi} = \frac{Q}{q} \frac{1}{\beta} e^{j\varphi}$$

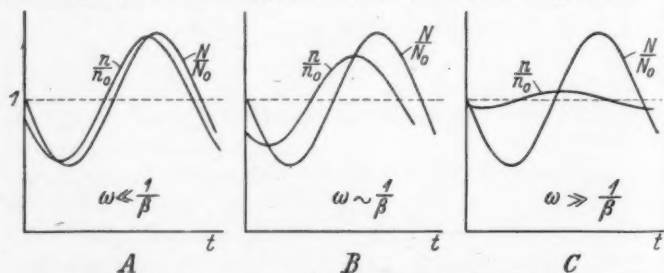
und somit eine Beziehung für q (durch Gleichsetzen der absoluten Beträge):

$$(16) \quad q = \frac{Q}{\sqrt{1 + \omega^2 \beta^2}}$$

und eine für φ :

$$(17) \quad \operatorname{tg} \varphi = \omega \beta.$$

Dies besagt: Die relativen Schwankungen von n um den Gleichgewichtswert erfolgen mit einer Amplitude q , die vom



Zeitabhängigkeit von N und n bei verschiedenen Frequenzen

Fig. 1

Wert $q_0 = Q$ bei verschwindender Frequenz bis zum Wert $q_\infty = 0$ bei unendlich großer Frequenz abnimmt, und mit einer Phasenverzögerung φ , die vom Wert 0 bei verschwindender Frequenz bis zum Wert $\pi/2$ für unendlich große Frequenz zunimmt (Fig. 1).

§ 5. Die bisher gewonnene Beziehung zwischen q und Q bzw. n und N reicht nicht aus, um die Frequenzabhängigkeit der spezifischen Wärme festzulegen, da sie ja über den Zusammenhang von n und T nichts aussagt. Es bedarf einer weiteren Annahme, die jedoch durch das Vorhergehende sehr nahegelegt wird.

Wir nehmen an, daß die innere Energie pro Volumeneinheit (εn) in erster Näherung linear sowohl vom Druck, d. h. von N , wie von T abhängig ist:

$$\frac{\partial n}{\partial N} = P \cdot \frac{\partial n}{\partial T},$$

wobei P eine Konstante bedeutet, die auch von der Geschwindigkeit der Zustandsänderung unabhängig sein muß.¹⁾ Diese Annahme besagt weiter nichts, als daß bei raschem Wechsel der Anzahl gaskinetischer Zusammenstöße der Umsatz in innere Energie prozentual ebensoviel unter dem für langsame Prozesse gültigen Wert bleibt, wie bei einem gleichschnellen Wechsel der Energie der Zusammenstöße. Mit Hilfe von (11) und (12) findet man:

$$\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{n_0}{N_0} \frac{q}{Q} e^{-j\varphi} = \frac{n_0}{N_0} \frac{1}{1 + j\omega\beta}.$$

Demnach:

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{1}{P} \frac{n_0}{N_0} \frac{1}{1 + j\omega\beta}$$

und wegen (7):

$$C_i' = \left. \frac{\partial (\varepsilon n)}{\partial T} \right|_v = \varepsilon v \frac{1}{P} \frac{n_0}{N_0} \frac{1}{1 + j\omega\beta}.$$

1) Für ein ideales Gas trifft diese Annahme jedenfalls zu. Denn einerseits ist der Energieinhalt pro Mol unabhängig von v und p (bzw. N), derjenige pro Volumeneinheit proportional $1/v$ oder p (bzw. N), so daß sich ergibt:

$$\frac{\partial \varepsilon n}{\partial p} \sim \varepsilon \frac{\partial n}{\partial N} = \text{const.}$$

Andererseits ist C und demnach auch

$$C_i = \varepsilon v \left. \frac{\partial n}{\partial T} \right|_v = \text{const.}$$

Berücksichtigt man die Abweichung vom idealen Gaszustand, so erhält man eine Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Amplitude. Hierfür liegen aber weder bei früheren Messungen (abgesehen von solchen an Knallwellen), noch bei den nachstehend beschriebenen irgendwelche Anzeichen vor.

Hiermit ist ein brauchbarer Ansatz für die Frequenzabhängigkeit der spezifischen Wärme gewonnen. Gemäß der Definition (7) hat man:

$$(18) \quad F(\omega) = \frac{1}{1 + j \omega \beta},$$

welche Funktion die gestellten Forderungen erfüllt.

§ 6. Wir führen diese Funktion in (8) ein und erhalten:

$$(8') \quad \frac{1}{q} \frac{\pi}{s} = \frac{p}{q} \left(1 + \frac{R}{C_a + \frac{C_i}{1 + j \omega \beta}} \right).$$

Der absolute Betrag dieses Ausdruckes gibt das Quadrat der Schallgeschwindigkeit an (vgl. S. 765). Statt dessen soll zur Vereinfachung der Rechnung hier der Realteil eingesetzt werden, der sich, wie gezeigt werden wird, von jenem nur unwesentlich unterscheidet. Dies führt zur Dispersionsformel:

$$(19) \quad V^2 = \frac{p}{q} \left(1 + R \frac{C + \omega^2 \beta^2 C_a}{C^2 + \omega^2 \beta^2 C_a^2} \right)^1,$$

wobei $(C_a + C_i)$ wieder durch C (Molwärme bei konstantem Volumen) ersetzt ist.

Man errechnet:

$$\begin{aligned} \frac{d V^2}{d \lg \omega} &= \frac{p}{q} \frac{2 R C_i C_a C \omega^2 \beta^2}{(C^2 + \omega^2 \beta^2 C_a^2)^2}, \\ \frac{d^2 V^2}{d \lg \omega^2} &= \frac{p}{q} \frac{4 R C_i C_a C \omega^2 \beta^2 (C^2 - C_a^2 \omega^2 \beta^2)}{(C^2 + \omega^2 \beta^2 C_a^2)^3}. \end{aligned}$$

Die Kurve, die V^2 als Funktion von $\lg \omega$ darstellt (Fig. 2), verläuft also für $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ parallel zur Abszisse mit den Ordinaten:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} V_0^2 &= \frac{p}{q} \left(1 + \frac{R}{C} \right) \\ \text{bzw. } V_\infty^2 &= \frac{p}{q} \left(1 + \frac{R}{C_a} \right), \\ V_\infty^2 - V_0^2 &= \Delta V^2 = \frac{p}{q} \frac{R C_i}{C C_a} \end{aligned} \right.$$

und besitzt einen Wendepunkt bei $\omega = \omega_w = \frac{1}{\beta} \frac{C}{C_a}$. Ihre Neigung an dieser Stelle

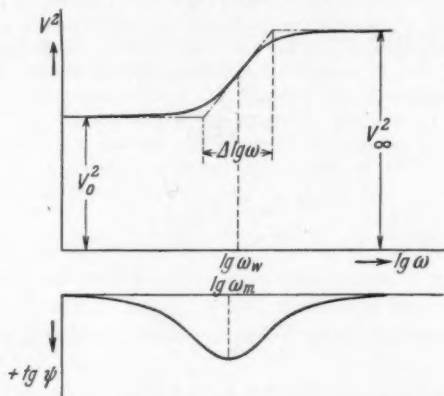
$$\left. \frac{d V^2}{d \lg \omega} \right|_{\omega_w} = \frac{p}{q} \frac{R C_i}{2 C C_a} = \frac{1}{2} \Delta V^2$$

1) Vgl. hierzu Anm. 2 S. 775.

ist ein Maß der maximalen Dispersion. Der Anstieg der Schallgeschwindigkeit findet also im wesentlichen in dem Frequenzbereich

$$\Delta \lg \omega = \Delta V^2: \frac{dV^2}{d \lg \omega} \Big|_{\omega_w} = 2,$$

d. h. etwa innerhalb von drei Oktaven statt.



Frequenzabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit
und der Phasenverschiebung zwischen Überdruck
und Verdichtung

Fig. 2

Man bemerkt, daß die Größe $1/\beta$ wesentlich die Lage des Dispersionsgebietes bestimmt. Sie spielt eine ähnliche Rolle, wie die Resonanzfrequenz in der Theorie der optischen Dispersion.¹⁾ Die Bedeutung von β wird ersichtlich, wenn man a aus (13) und (14) eliminiert:

$$(21) \quad \beta = \frac{b}{N_0} \left(1 - \frac{n_0}{N_0} \right).$$

n_0/N_0 läßt sich, sofern ϵ bekannt ist, auf Grund des Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetzes angeben. β ist also

1) Der charakteristische Unterschied gegenüber der Theorie der optischen Dispersion ist jedoch, daß es sich hier nicht um einen Resonanzeffekt handelt, und daß daher auch ohne Einführung eines Dämpfungsgliedes der Brechungsquotient nie rein imaginär wird. — Eine ganz analoge Rechnung ist bei P. Debye, Polare Molekeln, Leipzig 1929, durchgeführt.

proportional der Lebensdauer des Energiequants (b/N_0) und im allgemeinen nicht sehr verschieden von ihr.

§ 7. Wir berechnen ferner $\operatorname{tg} \psi$ als Quotienten des imaginären und des reellen Teiles der rechten Seite von (8'):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega \beta R C_i}{C^2 + \omega^2 \beta^2 C_a^2 + R C + \omega^2 \beta^2 R C_a} = \frac{\Delta V^2 \omega \omega_m}{V_0^2 \omega_m^2 + V_\infty^2 \omega^2},$$

wie man mit Hilfe von (20) leicht verifiziert. $\operatorname{tg} \psi$ verschwindet für $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ und erreicht ein Maximum bei

$$\omega_m = \frac{V_0}{V_\infty} \omega_m$$

mit dem Betrage

$$\operatorname{tg} \psi_m = \frac{\Delta V^2}{2 V_0 V_\infty}.$$

$\operatorname{tg} \psi_m$ ist von der Größenordnung weniger Prozente; der reelle Teil von (8') unterscheidet sich also selbst im ungünstigsten Fall kaum vom absoluten Betrag, wodurch die Vereinfachung bei der Ausrechnung der Dispersionskurve nachträglich gerechtfertigt wird.

Die Halbwertsbreite der $\operatorname{tg} \psi$ -Kurve ergibt sich zu:

$$\lg \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}},$$

was einem Intervall von fast vier Oktaven entspricht.

Die Größe ψ gibt die Phasenverschiebung zwischen der Druck- und der Verdichtungswelle an.¹⁾ Sie wird von Bedeutung bei der Berechnung der Schallintensität (L), d. i. der Energie, die durch die zur Fortpflanzungsrichtung senkrechte Flächeneinheit pro Zeiteinheit hindurchgeht. Es ist, wenn τ die Schwingungsdauer bedeutet, mit den Bezeichnungen und Ansätzen des § 2:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\tau} \int_{t=0}^{t=\tau} \pi dX = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \pi \frac{\partial X}{\partial t} dt = \frac{V}{\tau} \int_0^\tau \pi s dt \\ &= \frac{1}{2} V \pi_0 s_0 \cos \psi. \end{aligned}$$

1) $\psi \neq 0$ bedeutet also, daß das Boyle-Mariottesche Gesetz für die momentanen Zustandsgrößen nicht gültig ist.

Eine Schallwelle, deren Frequenz im Dispersionsgebiet liegt, wo $\operatorname{tg} \psi$ sich dem Maximalwert nähert, wird also weniger Energie transportieren, als eine sonst gleiche in einem nicht dispergierenden Medium.

Anmerkung 1

Der phänomenologischen Ableitung der Formel (8) sei eine mehr deduktive gegenübergestellt, die sich aus der Weiterentwicklung der H. A. Lorentz'schen Rechnungen (a. a. O.) ergibt.

Aus den Erhaltungssätzen der Materie, der Bewegungsgröße und der Energie leitet Lorentz drei Bewegungsgleichungen (a₁), (b₁), (c₁) ab, die bei Beschränkung auf ein eindimensionales Problem und nach Streichung der Glieder, welche innere Reibung und Wärmeleitung berücksichtigen, folgendermaßen lauten:

$$(a_0) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial s}{\partial t},$$

$$(b_0) \quad \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (h + h_0 s) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$(c_0) \quad \frac{1}{3} h_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} [1 + 2 \vartheta' (h_0)] \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\nu}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0.$$

Hierin bedeutet:

$$u = \frac{\partial X}{\partial t}.$$

h = Mittelwert von $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$, wobei ξ, η, ζ die Geschwindigkeitskomponenten eines Moleküls sind, und über alle Moleküle eines Massenelementes gemittelt wird.

h_0 = Gleichgewichtswert von h .

$\vartheta(h)$ = „intramolekulare“ Energie pro Massenelement.

Der Faktor ν , analog den Koeffizienten der inneren Reibung und der Wärmeleitung gebildet, geht in die Rechnung ein vermöge eines besonderen Ansatzes für den Energieinhalt des Gases pro Massenelement:

$$(d) \quad \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} h + \vartheta(h) + \frac{\nu}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Der erste Term entspricht der äußeren Arbeit, der zweite und dritte dem Wärmeinhalt; der letzte trägt dem Rechnung, daß während einer Zustandsänderung der Betrag der inneren Energie hinter dem Wert zurückbleibt, den er unter gleichen Umständen im Gleichgewichtszustand annehmen würde.¹⁾ Z. B. wird während einer Kompression des Gases in der $+x$ -Richtung u überall positiv sein und nach größeren x -Werten hin abnehmen; $\partial u / \partial x$ wird negativ, der Energieinhalt kleiner als im Gleichgewichtszustand bei sonst gleichen Zustandsgrößen.

1) A. a. O., S. 78 Formel (3); S. 108 unten; S. 111 oben.

Gegen den Ansatz (d) ist einzuwenden, daß bei genügend schneller Kompression $\partial u / \partial x$ beliebig große negative Werte annehmen, und damit der Energieinhalt selbst negativ werden kann. Offenbar darf also dieser Ansatz mit konstantem ν nicht zur Berechnung der Geschwindigkeit beliebig hochfrequenter Schallwellen herangezogen werden. In der Tat, wenn man aus (a_3) , (b_3) und (c_3) die Schallgeschwindigkeit V ableitet — eine Rechnung, die von Lorentz nur mit $\nu = 0$ durchgeführt wird¹⁾ und dann zur klassischen Formel führt —, so erhält man:

$$V = \frac{5 + 6 \vartheta' (h_0) + \frac{6}{\varrho h_0} j \omega \nu}{9 (1 + 2 \vartheta' (h_0))},$$

und demnach: $V_{\omega=\infty} = \infty$, ein Resultat, das mit der Erfahrung keinesfalls in Einklang sein kann.

Der verzögerten Einstellung des Gleichgewichtes soll nun durch einen anderen Energieansatz Rechnung getragen werden, entsprechend demjenigen, der im § 3 verwendet wurde:

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} h + \vartheta (h) \cdot F(\omega).$$

An die Stelle des Gliedes $\frac{\nu}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial x}$ in (d) ist also getreten:

$$\vartheta (h) \cdot (F(\omega) - 1),$$

wobei an die Funktion F wieder dieselben Forderungen zu stellen sind, wie früher. Damit wird aus (c_3) :

$$\frac{1}{3} h_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} [1 + 2 \vartheta' (h_0)] \frac{\partial h}{\partial t} + [F(\omega) - 1] \vartheta' (h_0) \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Man eliminiert $\partial u / \partial x$ mit Hilfe von (a_3) und erhält nach Umstellung der Glieder:

$$(e) \quad \frac{3}{h_0} \left[\frac{1}{2} + F(\omega) \vartheta' (h_0) \right] \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Macht man für h und s die gleichen Ansätze, wie früher (3) für π und s , so erhält man nach zweimaliger Differentiation nach x :

$$(f) \quad \frac{3}{h_0} \left[\frac{1}{2} + F(\omega) \vartheta' (h_0) \right] \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

Andererseits liefert (b_3) bei einmaliger Differentiation nach x :

$$(g) \quad \frac{1}{3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{h_0}{3} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Aus (f) und (g) ist $\partial^2 h / \partial x^2$ zu eliminieren:

$$(h) \quad \frac{h_0}{9 \left(\frac{1}{2} + F(\omega) \vartheta' (h_0) \right)} = \frac{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}} - \frac{h_0}{3}.$$

1) A. a. O., S. 95.

Bei einer ebenen Welle ist der Quotient der zweiten Ableitungen nach t und x gleich dem Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit; demnach:

$$(i) \quad V^2 = \frac{h_0}{3} \left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2} + 3 F(\omega) \vartheta'(h_0)} \right).$$

In der Sprache der Thermodynamik stellt h ein Maß für den Druck dar:

$$p = \frac{1}{3} MN (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{3} \varrho h_0$$

(mit den Bezeichnungen von §§ 4 und 5). Ferner ist nach Definition:

$\vartheta(h) = \frac{1}{m} E_i$, worin m das Molekulargewicht bezeichnet, und

$$\vartheta'(h_0) = \frac{1}{m} \frac{\partial E_i}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} \frac{dp}{dh} = \frac{1}{m} C_i \frac{m}{\varrho R} \frac{1}{3} \varrho = \frac{1}{3} \frac{C_i}{R},$$

weil zufolge der Zustandsgleichung $\frac{m}{\varrho} p = RT$ ist. Demnach wird aus (i):

$$V^2 = \frac{p}{\varrho} \left(1 + \frac{R}{\frac{3}{2} R + C_i F(\omega)} \right),$$

in Übereinstimmung mit Gl. (8), in welcher die linke Seite gemäß (4) durch V^2 ersetzt werden kann, während C_a , die spezifische Wärme der äußeren Freiheitsgrade, gleich derjenigen einatomiger Gase, gleich $\frac{5}{2} R$ ist.

Anmerkung 2

Man kann eine ähnliche Dispersionsformel auch aus den Rechnungen von Herzfeld und Rice (a. a. O.) herleiten: Sie definieren eine „Temperatur der inneren Freiheitsgrade“ T' (ebenso außer dem gewöhnlichen einen Wärmeleitungskoeffizienten der inneren Freiheitsgrade) und stellen den Energiebetrag, der pro Mol und Zeitelement von den äußeren auf die inneren Freiheitsgrade übergeht, durch folgenden Ausdruck dar:

$$\frac{C_a dT}{dt} = C_a \frac{T - T'}{\tau},$$

worin τ eine Zeit bedeutet, „die den Grad des Austausches zwischen äußeren und inneren Freiheitsgraden mißt“. Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung werden in gewohnter Form angesetzt, die Energiegleichung aber in zwei Teile aufgespalten; eine für die äußeren Freiheitsgrade:

$$\frac{C_a dT}{dt} = p \frac{M}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\dots) - C_a \frac{T - T'}{\tau},$$

und eine für die inneren:

$$\frac{C_i dT}{dt} = (\dots) + C_a \frac{T - T'}{\tau}.$$

In den Klammern stehen Glieder, die innere Reibung und Wärmeleitung berücksichtigen. Mit Hilfe von Ansätzen gleicher räumlicher und zeitlicher Periodizität ergeben sich hieraus vier Gleichungen, aus denen die Zustandsvariablen eliminiert werden. Es resultiert eine komplizierte Gleichung zwischen V^2 und ω^2 , deren Lösung, in erster Näherung durchgeführt, eine Dispersionsformel vom Typus:

$$V = V_0 (1 + \omega^2 (\alpha_0 + \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2))$$

ergibt.

Läßt man jedoch von vornherein den Einfluß von innerer Reibung und Wärmeleitung außer acht, und verfährt man weiter, wie es oben geschehen ist, so erhält man:

$$V^2 = \frac{p}{q} \left(1 + R \frac{1 + j \omega \tau \frac{C_i}{C_a}}{C + j \omega \tau C_i} \right),$$

was einen ganz ähnlichen Dispersionsverlauf ergibt, wie Gl. (19).

(Wendepunkt bei $\omega = \omega_w = \frac{C}{C_i} \frac{1}{\tau}$). Die Analogie rührt davon her, daß die Definitionsgleichung für τ vom gleichen Typus ist wie (10).

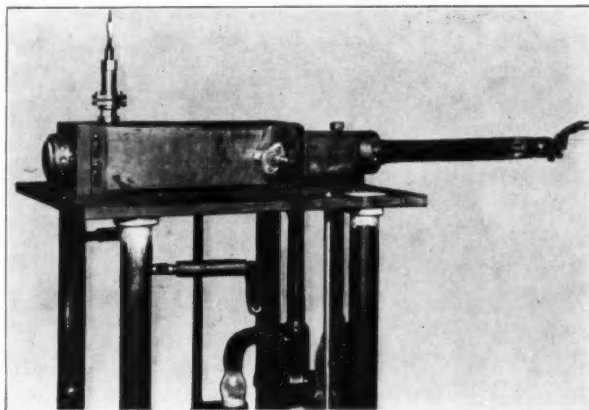
Zusammenfassung

Auf Grund einfacher Annahmen über den Austausch quantisierter Anregungsenergie bei Zusammenstößen zwischen Molekülen wird eine Dispersionsgleichung (19) für die Fortpflanzung des Schalles in Gasen abgeleitet. Sie enthält nur eine thermodynamisch nicht bestimmbare Größe: die Lebensdauer der Anregungsenergie.

Den Herren Professoren E. Grüneisen, G. Jaffé und H. Kneser ist der Verf. für Kritik und Beratung sehr zu Dank verpflichtet.

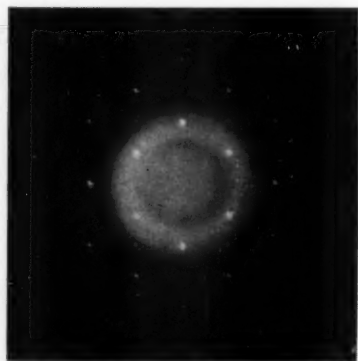
Marburg, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 17. August 1931)



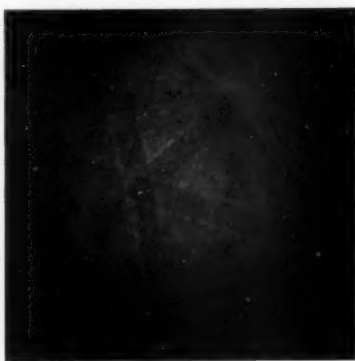
Versuchsanordnung für Elektroneninterferenzen

Fig. 1



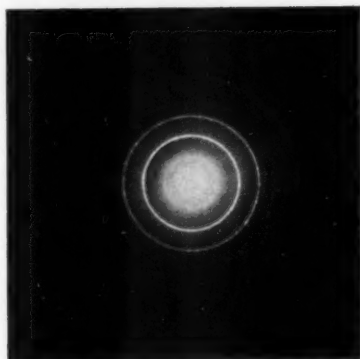
Interferenzaufnahme eines $2 \cdot 10^{-7}$ cm
dicken Kollodiumhäutchens
(60 kV; Belichtungszeit 10 Sek.)

Fig. 3



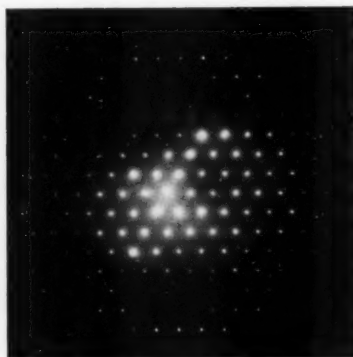
Interferenzaufnahme eines $7,3 \cdot 10^{-5}$ cm
dicken Glimmerhäutchens. Bei dieser
Kristalldicke ist die Zerstreuung be-
reits so stark, daß der Primärstrahl
völlig verschwunden ist; das ganze
Interferenzbild ist durch Reflexion der
diffus zerstreuten Strahlen
verursacht (60 kV)

Fig. 4



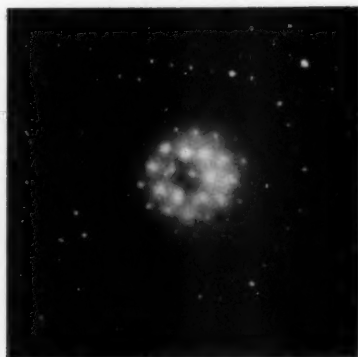
Kristallpulveraufnahme von NaF (50 kV)

Fig. 5



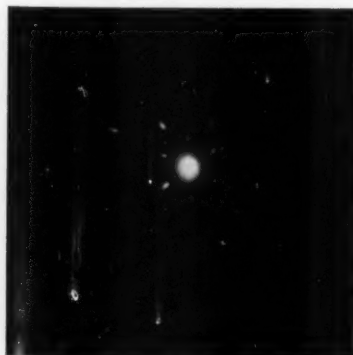
Interferenzaufnahme eines $9 \cdot 10^{-4}$ cm dicken Glimmerhäutchens

Fig. 6



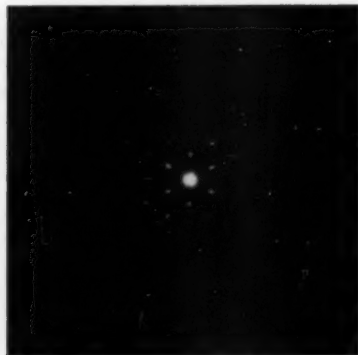
Interferenzaufnahme eines $1,7 \cdot 10^{-5}$ cm dicken Glimmerhäutchens

Fig. 7



Interferenzbild der durch $1 \cdot 10^{-3}$ cm Al hindurchgegangenen Elektronenstrahlung

Fig. 9



Interferenzbild der am Goldblech reflektierten Strahlung

Fig. 11